

# Systèmes inductifs surcohérents de $\mathcal{D}$ -modules arithmétiques

Daniel Caro

## Abstract

Let  $\mathcal{V}$  be a complete discrete valuation ring of unequal characteristic with perfect residue field,  $\mathcal{P}$  be a smooth, quasi-compact, separated formal scheme over  $\mathcal{V}$ . In his theory of arithmetic  $\mathcal{D}$ -modules, Berthelot constructed the inductive system of sheaves of rings  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)} := (\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ , where  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(m)}$  is the  $p$ -adic completion of the ring of differential operators of level  $m$  over  $\mathcal{P}$ . Moreover, he introduced the sheaf  $\mathcal{D}_{\mathcal{P}, \mathbb{Q}}^{\dagger} := \varinjlim_m \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(m)} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$  of differential operators over  $\mathcal{P}$  of finite level. In this paper, we define the notion of overcoherence for complexes of  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}$ -modules and check that this notion is equivalent to that of overcoherence for complexes of  $\mathcal{D}_{\mathcal{P}, \mathbb{Q}}^{\dagger}$ -modules.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Localisations de catégories dérivées de systèmes inductifs sur le niveau de <math>\mathcal{D}</math>-modules arithmétiques</b>	<b>4</b>
1.1	Rappels et définitions de Berthelot dans le cas des complexes . . . . .	4
1.2	Point de vue de la catégorie dérivée d'une catégorie abélienne quotient à la Serre . . . . .	6
1.3	Propriétés locales . . . . .	9
1.4	Bifoncteurs homomorphismes . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Systèmes inductifs cohérents de <math>\mathcal{D}</math>-modules arithmétiques</b>	<b>14</b>
2.1	Cohérence à ind-isogénie près . . . . .	14
2.2	Cohérence à lim-ind-isogénie près . . . . .	19
2.3	Cohérence au sens de Berthelot . . . . .	21
2.4	Sur une équivalence de catégories des complexes à cohomologie cohérente . . . . .	22
2.5	Comparaison entre les notions de cohérence . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Foncteur de localisation en dehors d'un diviseur</b>	<b>25</b>
3.1	Produits tensoriels, quasi-cohérence et foncteur oubli . . . . .	25
3.2	Définition et propriétés dans le cas des complexes . . . . .	27
3.3	Définition et propriétés dans le cas des modules . . . . .	31
3.4	Théorème de type $A$ . . . . .	32
3.5	Un critère de stabilité de la cohérence par localisation en dehors d'un diviseur . . . . .	33
<b>4</b>	<b>Rappels et compléments sur le foncteur cohomologique local à support strict dans un fermé et sur le foncteur de localisation en dehors d'un fermé</b>	<b>36</b>
4.1	Triangle distingué de localisation relativement à un diviseur . . . . .	36
4.2	Commutations et compatibilités des foncteurs locaux et de localisation dans le cas d'un diviseur . . . . .	38
4.3	Foncteur cohomologique local à support strict dans un sous-schéma fermé . . . . .	40
4.4	Foncteur de localisation en dehors d'un sous-schéma fermé . . . . .	41

<b>5</b>	<b>Surcohérence</b>	<b>43</b>
5.1	Image inverse extraordinaire, image directe	43
5.2	Stabilité par image inverse du coefficient constant avec singularités surconvergentes	44
5.3	Surcohérence dans un $\mathcal{V}$ -schéma formel lisse, stabilité par image inverse extraordinaire par une immersion fermée	47
5.4	Surcohérence	49
5.5	Calcul direct de la cohérence du coefficient constant avec singularités surconvergentes pour les systèmes inductifs	50

## Introduction

Soit  $\mathcal{V}$  un anneau de valuation discrète complet d'inégales caractéristiques  $(0, p)$ , de corps résiduel parfait. Soient  $\mathcal{P}$  un  $\mathcal{V}$ -schéma formel séparé, quasi-compact, lisse et  $P$  sa fibre spéciale. Pour tout entier  $m \in \mathbb{N}$ , Berthelot a construit dans [Ber96b] le faisceau d'anneaux  $\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{(m)}$  des opérateurs différentiels sur  $\mathcal{P}$  de niveau  $m$ . En le complétant  $p$ -adiquement, on obtient le faisceau d'anneaux  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(m)}$ . On dispose de plus des morphismes canoniques de changement de niveaux  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(m)} \rightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(m+1)}$  (voir [Ber96b]), ce qui donne le système inductif d'anneaux  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)} := (\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ . Berthelot construit le faisceau des opérateurs différentiels de niveau fini en posant  $\mathcal{D}_{\mathcal{P}, \mathbb{Q}}^{\dagger} := \varinjlim_m \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(m)} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ . Par tensorisation par  $\mathbb{Q}$  et

passage à la limite sur le niveau, on obtient le foncteur noté  $\varinjlim : D^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}) \rightarrow D^b(\mathcal{D}_{\mathcal{P}, \mathbb{Q}}^{\dagger})$ . Afin d'obtenir un foncteur pleinement fidèle qui factorise ce foncteur  $\varinjlim$ , Berthelot a introduit la catégorie  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)})$  qui est une localisation de  $D^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)})$ . Il a défini la sous-catégorie pleine des complexes cohérents de  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)})$  qu'il note  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)})$ . Il a alors établi que le foncteur  $\varinjlim$  induit l'équivalence de catégories

$$(*) \quad \varinjlim : \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}) \cong D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{P}, \mathbb{Q}}^{\dagger}).$$

Nous avons défini dans [Car04] la sous-catégorie pleine notée  $D_{\text{surcoh}}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{P}, \mathbb{Q}}^{\dagger})$  de  $D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{P}, \mathbb{Q}}^{\dagger})$  des complexes surcohérents. Un complexe cohérent est surcohérent si son image inverse extraordinaire par un morphisme lisse reste cohérent par tout foncteur de localisation en dehors d'un diviseur. Si  $\mathcal{E}$  est un objet  $D_{\text{surcoh}}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{P}, \mathbb{Q}}^{\dagger})$  et  $\mathcal{E}^{(\bullet)}$  est un objet de  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)})$  tel que  $\varinjlim (\mathcal{E}^{(\bullet)}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$ , il n'est pas évident que  $\mathcal{E}^{(\bullet)}$  vérifie les mêmes propriétés de stabilité que  $\mathcal{E}$ . La raison est que pour tout objet  $\mathcal{F}^{(\bullet)}$  de  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)})$ , la propriété que  $\varinjlim (\mathcal{F}^{(\bullet)})$  soit cohérent n'implique pas que  $\mathcal{F}^{(\bullet)}$  soit cohérent. Dans ce papier, nous introduisons de manière analogue la notion de surcohérence pour un complexe de  $D(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)})$ . En notant  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{surcoh}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)})$  la sous-catégorie pleine de  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)})$  des complexes surcohérents, nous vérifions que l'on dispose de l'équivalence de catégories

$$(**) \quad \varinjlim : \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{surcoh}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}) \cong D_{\text{surcoh}}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{P}, \mathbb{Q}}^{\dagger}).$$

Le point crucial de cette équivalence  $(**)$  est le théorème 3.5.1 dont le corollaire 3.5.2 signifie que si la localisation en dehors d'un certain diviseur  $T$  de  $P$  de l'image par  $\varinjlim$  d'un complexe cohérent  $\mathcal{E}^{(\bullet)}$  reste cohérent, alors la localisation en dehors de ce diviseur  $T$  de  $\mathcal{E}^{(\bullet)}$  reste cohérent.

Précisons à présent le contenu de ce papier. Soit  $T$  un diviseur de  $P$ . Toutes les constructions des faisceaux des opérateurs différentiels ci-dessus restent valable en rajoutant des singularités surconvergentes le long de  $T$  (voir [Ber96b]). Notons alors  $M(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  la catégorie des  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$ -modules (toujours à gauche par défaut). Dans le premier chapitre, en localisant la catégorie  $M(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  de manière identique à Berthelot pour les complexes, on introduit la catégorie  $\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . Nous vérifions que c'est une catégorie abélienne quotient à la Serre de  $M(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . Dans le second chapitre, nous définissons les objets de  $\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  qui sont cohérents à lim-ind-isogénies près. Cette notion de cohérence à lim-ind-isogénies près est locale sur  $\mathcal{P}$ , ce qui est la motivation principale de son introduction. De plus,

en notant  $D_{\text{coh}}^b(\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)))$  la sous-catégorie pleine de  $D^b(\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)))$  des complexes dont les espaces de cohomologie sont cohérents à lim-ind-isogénie près, on vérifie l'équivalence canonique de catégories de la forme

$$\underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \cong D_{\text{coh}}^b(\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))).$$

Nous établissons aussi un des résultats techniques utiles dans la preuve du résultat central du troisième chapitre (i.e. le théorème 3.5.1 déjà évoqué ci-dessus) qui est que pour vérifier qu'un morphisme de  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  soit un isomorphisme, il suffit de le prouver pour ses espaces de cohomologie calculés dans  $\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ , ce qui nous ramène ainsi au cas des modules.

Dans le troisième chapitre, nous rappelons et étudions le foncteur de localisation en dehors d'un diviseur puis nous établissons le point clé de ce papier évoqué ci-dessus concernant la stabilité de la cohérence par foncteur de localisation en dehors d'un diviseur. Dans le quatrième chapitre, nous rappelons la construction des foncteurs cohomologiques à support strict dans un fermé et de localisation en dehors d'un fermé de [Car04] et complétons, lorsque cela est utile, la vérification de certaines de leurs propriétés données dans [Car04], notamment concernant la fonctorialité. Enfin, dans le dernier chapitre, nous définissons la notion de surcohérence dans le contexte des systèmes inductifs de  $\mathcal{D}$ -modules arithmétiques et établissons l'équivalence (\*\*) entre cette notion de surcohérence a priori plus forte et celle donnée dans [Car04].

## Remerciement

Je remercie Tomoyuki Abe pour ses encouragements à rédiger en détail la partie concernant le foncteur cohomologique local ainsi que pour ses commentaires sur une version préliminaire. Je remercie Pierre Berthelot pour son avis sur les résultats de ce papier.

## Notations

Dans ce papier, on désigne par  $\mathcal{V}$  un anneau de valuation discrète complet d'inégales caractéristiques  $(0, p)$ ,  $k$  son corps résiduel supposé parfait,  $K$  son corps des fractions et  $\pi$  une uniformisante. Les faisceaux seront notés par des lettres calligraphiques, leurs sections globales par la lettre droite associée. Les modules sont par défaut à gauche. On notera avec des chapeaux les complétions  $p$ -adiques et si  $\mathcal{E}$  est un faisceau en groupes abéliens alors on posera  $\mathcal{E}_{\mathbb{Q}} := \mathcal{E} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ . Soient  $\mathcal{A}$  un faisceau d'anneaux sur un espace topologique  $X$ . Si  $*$  est l'un des symboles  $+$ ,  $-$ , ou  $b$ ,  $D^*(\mathcal{A})$  désigne la catégorie dérivée des complexes de  $\mathcal{A}$ -modules (à gauche) vérifiant les conditions correspondantes d'annulation des faisceaux de cohomologie. Lorsque l'on souhaite préciser entre droite et gauche, on précise alors comme suit  $D^{*(g)}(\mathcal{A})$  ou  $D^*(\mathcal{A}^d)$ . On note  $D_{\text{coh}}^b(\mathcal{A})$  la sous-catégorie pleine de  $D(\mathcal{A})$  des complexes à cohomologie cohérente et bornée. On suppose (sans nuire à la généralité) que tous les  $k$ -schémas sont réduits et on pourra confondre les diviseurs avec leur support.

Les  $\mathcal{V}$ -schémas formels seront indiqués par des lettres calligraphiques ou gothiques et leur fibre spéciale par la lettre droite correspondante. On se donne de plus  $\mathcal{P}$  un  $\mathcal{V}$ -schéma formel séparé, quasi-compact, lisse et  $T$  un diviseur de  $\mathcal{P}$ . Pour alléger les notations, on notera alors  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(T) := \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(T) \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(m)}$ , où  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(T)$  désigne les faisceaux d'anneaux construits par Berthelot dans [Ber96b, 4.2.3] et  $\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{(m)}$  est le faisceau des opérateurs différentiels de niveau  $m$  sur  $\mathcal{P}$  (voir [Ber96b, 2.2]). On fixe  $\lambda_0: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  une application croissante telle que  $\lambda_0(m) \geq m$ . On pose alors  $\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(T) := \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(\lambda_0(m))}(T)$  et  $\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(T) := \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(T) \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(m)}$ . Nous verrons d'ailleurs a posteriori (voir 2.2.6 et 2.3.4), que l'hypothèse  $\lambda_0 = id$  ne nuit pas à la généralité. Enfin, si  $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{P}$  est un morphisme de  $\mathcal{V}$ -schémas formels lisses, pour tout entier  $i \in \mathbb{N}$ , on note  $f_i: X_i \rightarrow P_i$  le morphisme induit modulo  $\pi^{i+1}$ . On pose enfin  $\mathcal{D}_{P_i}^{(m)}(T) := \mathcal{V}/\pi^{i+1} \otimes_{\mathcal{V}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(T) = \mathcal{B}_{P_i}^{(m)}(T) \otimes_{\mathcal{O}_{P_i}} \mathcal{D}_{P_i}^{(m)}$  et  $\widetilde{\mathcal{D}}_{P_i}^{(m)}(T) := \widetilde{\mathcal{B}}_{P_i}^{(m)}(T) \otimes_{\mathcal{O}_{P_i}} \mathcal{D}_{P_i}^{(m)}$ .

# 1 Localisations de catégories dérivées de systèmes inductifs sur le niveau de $\mathcal{D}$ -modules arithmétiques

## 1.1 Rappels et définitions de Berthelot dans le cas des complexes

Nous utiliserons dans ce papier toutes les notations qui suivent :

**1.1.1** (Catégories localisées de la forme  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}}$  de Berthelot). On rappelle ici les constructions de Berthelot de [Ber02, 4.2.1 et 4.2.2] (Ce sont des cas particuliers pour simplifier la présentation de cette introduction [Ber02]). On dispose du système inductif d'anneaux  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T) := (\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(T))_{m \in \mathbb{N}}$  (les morphismes de transition sont construits dans [Ber96b]). Nous disposons de la catégorie dérivée  $D^{\sharp}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ , où  $\sharp \in \{\emptyset, +, -, b\}$ . Les objets de  $D(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  seront notés  $\mathcal{E}^{(\bullet)} = (\mathcal{E}^{(m)}, \alpha^{(m', m)})$ , où  $m, m'$  parcourent les entiers positifs tels que  $m' \geq m$ , où  $\mathcal{E}^{(m)}$  est un complexe de  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(T)$ -modules et  $\alpha^{(m', m)} : \mathcal{E}^{(m)} \rightarrow \mathcal{E}^{(m')}$  sont les morphismes  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(T)$ -linéaires de transition.

- Soit  $M$  l'ensemble filtrant (muni de la relation d'ordre canonique) des applications croissantes  $\chi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ . Pour toute application  $\chi \in M$ , on note  $\chi^*(\mathcal{E}^{(\bullet)}) := (\mathcal{E}^{(\chi(m))}, p^{\chi(m') - \chi(m)} \alpha^{(m', m)})$ . On obtient en fait un foncteur  $\chi^* : D(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \rightarrow D(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  de la manière suivante : si  $f^{(\bullet)} : \mathcal{E}^{(\bullet)} \rightarrow \mathcal{F}^{(\bullet)}$  de  $D(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ , le morphisme de niveau  $m$  de  $\chi^* f^{(\bullet)}$  est  $f^{(\chi(m))}$ . Un morphisme  $f^{(\bullet)} : \mathcal{E}^{(\bullet)} \rightarrow \mathcal{F}^{(\bullet)}$  de  $D(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  est une ind-isogénie s'il existe  $\chi \in M$  et un morphisme  $g^{(\bullet)} : \mathcal{F}^{(\bullet)} \rightarrow \chi^* \mathcal{E}^{(\bullet)}$  de  $D(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  tels que les morphismes  $g^{(\bullet)} \circ f^{(\bullet)}$  et  $\chi^*(f^{(\bullet)}) \circ g^{(\bullet)}$  de  $D(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  sont les morphismes canoniques. La catégorie obtenue en localisant  $D^{\sharp}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  par rapport aux ind-isogénies se note  $\underline{D}_{\mathbb{Q}}^{\sharp}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ .
- Soit  $L$  l'ensemble filtrant (muni de la relation d'ordre canonique) des applications croissantes  $\lambda : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  telles que  $\lambda(m) \geq m$ . Pour tout  $\lambda \in L$ , on note  $\lambda^*(\mathcal{E}^{(\bullet)}) := (\mathcal{E}^{(\lambda(m))}, \alpha^{(\lambda(m'), \lambda(m))})_{m' \geq m}$ . Comme pour [Ber02, 4.2.2], on note  $\Lambda^{\sharp}$  l'ensemble des morphismes  $f^{(\bullet)} : \mathcal{E}^{(\bullet)} \rightarrow \mathcal{F}^{(\bullet)}$  de  $\underline{D}_{\mathbb{Q}}^{\sharp}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  tels qu'il existe  $\lambda \in L$  et un morphisme  $g^{(\bullet)} : \mathcal{F}^{(\bullet)} \rightarrow \lambda^* \mathcal{E}^{(\bullet)}$  de  $\underline{D}_{\mathbb{Q}}^{\sharp}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  tels que les morphismes  $g^{(\bullet)} \circ f^{(\bullet)}$  et  $\lambda^*(f^{(\bullet)}) \circ g^{(\bullet)}$  de  $\underline{D}_{\mathbb{Q}}^{\sharp}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  sont les morphismes canoniques. Par commodité pour en référer, convenons que les morphismes de  $\Lambda^{\sharp}$  sont les « lim-isomorphismes ». La catégorie obtenue en localisant  $\underline{D}_{\mathbb{Q}}^{\sharp}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  par rapport aux lim-isomorphismes sera notée  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}}^{\sharp}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ .
- On note  $S^{\sharp}$  l'ensemble des morphismes  $f^{(\bullet)} : \mathcal{E}^{(\bullet)} \rightarrow \mathcal{F}^{(\bullet)}$  de  $D^{\sharp}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  tels qu'il existe  $\chi \in M$ ,  $\lambda \in L$  et un morphisme  $g^{(\bullet)} : \mathcal{F}^{(\bullet)} \rightarrow \lambda^* \chi^* \mathcal{E}^{(\bullet)}$  de  $D(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  tels que les morphismes  $g^{(\bullet)} \circ f^{(\bullet)}$  et  $\lambda^* \chi^*(f^{(\bullet)}) \circ g^{(\bullet)}$  de  $D(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  sont les morphismes canoniques. Les morphismes de  $S^{\sharp}$  sont appelés les « lim-ind-isogénies ». De même que pour  $\Lambda^{\sharp}$ , on vérifie que  $S^{\sharp}$  est un système multiplicatif.

**1.1.2.** Un morphisme  $f^{(\bullet)} : \mathcal{E}^{(\bullet)} \rightarrow \mathcal{F}^{(\bullet)}$  de  $\underline{D}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  est représenté par un morphisme  $\phi^{(\bullet)} : \mathcal{E}^{(\bullet)} \rightarrow \chi^* \mathcal{F}^{(\bullet)}$  pour un certain  $\chi \in M$ . De plus, deux morphismes  $\phi_1^{(\bullet)} : \mathcal{E}^{(\bullet)} \rightarrow \chi_1^* \mathcal{F}^{(\bullet)}$  et  $\phi_2^{(\bullet)} : \mathcal{E}^{(\bullet)} \rightarrow \chi_2^* \mathcal{F}^{(\bullet)}$  de  $D(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  induisent la même flèche de  $\underline{D}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  si et seulement s'il existe  $\chi \geq \chi_1, \chi_2$ , tels que les deux flèches composées  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \xrightarrow{\phi_1^{(\bullet)}} \chi_1^* \mathcal{F}^{(\bullet)} \rightarrow \chi^* \mathcal{F}^{(\bullet)}$  et  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \xrightarrow{\phi_2^{(\bullet)}} \chi_2^* \mathcal{F}^{(\bullet)} \rightarrow \chi^* \mathcal{F}^{(\bullet)}$  soient égales. Pour résumer, pour tous  $\mathcal{E}^{(\bullet)}, \mathcal{F}^{(\bullet)} \in \underline{D}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ , on dispose de la formule

$$\mathrm{Hom}_{\underline{D}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))}(\mathcal{E}^{(\bullet)}, \mathcal{F}^{(\bullet)}) = \varinjlim_{\chi \in M} \mathrm{Hom}_{D(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))}(\mathcal{E}^{(\bullet)}, \chi^* \mathcal{F}^{(\bullet)}). \quad (1.1.2.1)$$

De même, on dispose, pour tous  $\mathcal{E}^{(\bullet)}, \mathcal{F}^{(\bullet)} \in S^{-1}D(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ , de l'égalité :

$$\mathrm{Hom}_{S^{-1}D(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))}(\mathcal{E}^{(\bullet)}, \mathcal{F}^{(\bullet)}) = \varinjlim_{\lambda \in L} \varinjlim_{\chi \in M} \mathrm{Hom}_{D(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))}(\mathcal{E}^{(\bullet)}, \lambda^* \chi^* \mathcal{F}^{(\bullet)}). \quad (1.1.2.2)$$

**Lemme 1.1.3.** 1. Soient  $\chi_1 \in M$  et  $f^{(\bullet)}: \mathcal{E}^{(\bullet)} \rightarrow \chi_1^* \mathcal{F}^{(\bullet)}$  un morphisme de  $D(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . S'il existe  $\chi_2 \in M$  et un morphisme  $g^{(\bullet)}: \mathcal{F}^{(\bullet)} \rightarrow \chi_2^* \mathcal{E}^{(\bullet)}$  de  $D(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  tel que  $\chi_1^*(g^{(\bullet)}) \circ f^{(\bullet)}$  et  $\chi_2^*(f^{(\bullet)}) \circ g^{(\bullet)}$  sont dans  $\underline{D}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  les morphismes canoniques, alors  $f^{(\bullet)}$  est une ind-isogénie.

2. Soient  $\chi_1 \in M$ ,  $\lambda_1 \in L$  et  $f^{(\bullet)}: \mathcal{E}^{(\bullet)} \rightarrow \lambda_1^* \chi_1^* \mathcal{F}^{(\bullet)}$  un morphisme de  $D(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . S'il existe  $\chi_2 \in M$ ,  $\lambda_2 \in L$  et un morphisme  $g^{(\bullet)}: \mathcal{F}^{(\bullet)} \rightarrow \lambda_2^* \chi_2^* \mathcal{E}^{(\bullet)}$  de  $D(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  tels que les morphismes  $\lambda_1^* \chi_1^*(g^{(\bullet)}) \circ f^{(\bullet)}$  et  $\lambda_2^* \chi_2^*(f^{(\bullet)}) \circ g^{(\bullet)}$  sont les morphismes canoniques dans  $S^{-1}D(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ , alors  $f^{(\bullet)}$  est une lim-ind-isogénie.

*Démonstration.* 1) Traitons d'abord la première assertion. a) Dans un premier temps supposons  $\chi_1 = 0$ , i.e.  $\chi_1^* = id$ . Par hypothèse, il existe alors  $\chi \geq \chi_2$  tel que  $g^{(\bullet)} \circ f^{(\bullet)}$  composé avec la flèche canonique  $\chi_2^* \mathcal{E}^{(\bullet)} \rightarrow \chi^* \mathcal{E}^{(\bullet)}$  soit la flèche canonique dans  $D(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  et tel que  $\chi_2^*(f^{(\bullet)}) \circ g^{(\bullet)}$  composé avec la flèche canonique  $\chi_2^* \mathcal{F}^{(\bullet)} \rightarrow \chi^* \mathcal{F}^{(\bullet)}$  soit la flèche canonique dans  $D(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . En notant  $h^{(\bullet)}$  le composé de  $g^{(\bullet)}$  avec le morphisme canonique  $\chi_2^* \mathcal{E}^{(\bullet)} \rightarrow \chi^* \mathcal{E}^{(\bullet)}$ , on vérifie alors que  $h^{(\bullet)} \circ f^{(\bullet)}$  et  $\chi^*(f^{(\bullet)}) \circ h^{(\bullet)}$  sont dans  $D(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  les morphismes canoniques.

b) Revenons à présent au cas général. En composant deux flèches consécutives de la suite  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \xrightarrow{f^{(\bullet)}} \chi_1^* \mathcal{F}^{(\bullet)} \xrightarrow{\chi_1^*(g^{(\bullet)})}$

$\chi_1^* \chi_2^* \mathcal{E}^{(\bullet)} \xrightarrow{\chi_1^* \chi_2^*(f^{(\bullet)})} \chi_1^* \chi_2^*(\chi_1^* \mathcal{F}^{(\bullet)})$  on obtient les morphismes canoniques dans  $\underline{D}_{\mathbb{Q}}^{\#}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . D'où le résultat d'après le cas a) traité ci-dessus.

2) Pour la seconde assertion, on procède de manière analogue : on traite d'abord le cas où  $\lambda_1 = id$  et  $\chi_1 = 0$ , puis le cas général (on remplace partout  $\chi_i^*$  par  $\lambda_i^* \chi_i^*$  pour  $i = 1, 2$ ).  $\square$

**Lemme 1.1.4.** On dispose de l'équivalence canonique de catégories  $S^{\#-1}D^{\#}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \cong \underline{LD}_{\mathbb{Q}}^{\#}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  qui est l'identité sur les objets.

*Démonstration.* Comme le foncteur canonique  $D^{\#}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \rightarrow \underline{D}_{\mathbb{Q}}^{\#}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  envoie une lim-ind-isogénie sur un lim-isomorphisme, le foncteur canonique  $D^{\#}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \rightarrow \underline{LD}_{\mathbb{Q}}^{\#}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  se factorise canoniquement en le foncteur  $S^{\#-1}D^{\#}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \rightarrow \underline{LD}_{\mathbb{Q}}^{\#}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . Réciproquement, comme une ind-isogénie est en particulier une lim-ind-isogénie, on bénéficie du foncteur canonique  $\underline{D}_{\mathbb{Q}}^{\#}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \rightarrow S^{\#-1}D^{\#}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . Soit  $f^{(\bullet)}: \mathcal{E}^{(\bullet)} \rightarrow \mathcal{F}^{(\bullet)}$  un morphisme de  $\underline{D}_{\mathbb{Q}}^{\#}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  tel qu'il existe  $\lambda_2 \in L$  et un morphisme  $g^{(\bullet)}: \mathcal{F}^{(\bullet)} \rightarrow \lambda_2^* \mathcal{E}^{(\bullet)}$  de  $\underline{D}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  tels que  $g^{(\bullet)} \circ f^{(\bullet)}$  et  $\lambda_2^*(f^{(\bullet)}) \circ g^{(\bullet)}$  sont les morphismes canoniques. Il existe  $\chi_1 \in M$  tel que  $f^{(\bullet)}$  soit représenté par un morphisme de  $D^{\#}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  de la forme  $\phi^{(\bullet)}: \mathcal{E}^{(\bullet)} \rightarrow \chi_1^* \mathcal{F}^{(\bullet)}$ . Il existe  $\chi_2 \in M$  tel que  $g^{(\bullet)}$  soit représenté par un morphisme de  $D^{\#}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  de la forme  $\psi^{(\bullet)}: \mathcal{F}^{(\bullet)} \rightarrow \chi_2^* \lambda_2^* \mathcal{E}^{(\bullet)}$ . On vérifie alors que  $\chi_1^*(\psi^{(\bullet)}) \circ \phi^{(\bullet)}$  et  $\chi_2^* \lambda_2^*(\phi^{(\bullet)}) \circ \psi^{(\bullet)}$  sont dans  $\underline{D}_{\mathbb{Q}}^{\#}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  (et donc dans  $S^{-1}D^{\#}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ ) les morphismes canoniques. D'après le lemme 1.1.3.2, on en déduit que  $\phi^{(\bullet)}$  est une lim-ind-isogénie.  $\square$

**1.1.5.** Il découle du lemme 1.1.4 et de 1.1.2.2 que l'on dispose, pour tous  $\mathcal{E}^{(\bullet)}, \mathcal{F}^{(\bullet)} \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ , de l'égalité :

$$\mathrm{Hom}_{\underline{LD}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))}(\mathcal{E}^{(\bullet)}, \mathcal{F}^{(\bullet)}) = \varinjlim_{\lambda \in L} \varinjlim_{\chi \in M} \mathrm{Hom}_{D(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))}(\mathcal{E}^{(\bullet)}, \lambda^* \chi^* \mathcal{F}^{(\bullet)}). \quad (1.1.5.1)$$

*Remarques 1.1.6.* • Soit  $\phi^{(\bullet)}: \mathcal{E}^{(\bullet)} \rightarrow \mathcal{F}^{(\bullet)}$  un morphisme de  $D(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . Grâce à 1.1.2 et 1.1.3 (resp. et 1.1.5), on vérifie alors que  $\phi^{(\bullet)}$  est un isomorphisme dans  $\underline{D}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  (resp.  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ ) si et seulement si  $\phi^{(\bullet)} \in M$  (resp.  $\phi^{(\bullet)} \in S$ ).

• On déduit du premier point qu'un complexe  $\mathcal{E}^{(\bullet)}$  de  $D(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  est isomorphe à 0 dans  $\underline{D}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  (resp.  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ ) si et seulement si il existe  $\chi \in M$  (resp.  $\chi \in M$  et  $\lambda \in L$ ) tels que la flèche canonique  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \rightarrow \chi^* \mathcal{E}^{(\bullet)}$  (resp.  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \rightarrow \lambda^* \chi^* \mathcal{E}^{(\bullet)}$ ) est le morphisme nul.

## 1.2 Point de vue de la catégorie dérivée d'une catégorie abélienne quotient à la Serre

**1.2.1.** Notons  $M(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  la catégorie des  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$ -modules. Les  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$ -modules seront notés  $\mathcal{E}^{(\bullet)} = (\mathcal{E}^{(m)}, \alpha^{(m',m)})$ , où  $m, m'$  parcourent les entiers positifs tels que  $m' \geq m$ , où  $\mathcal{E}^{(m)}$  désigne un  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(T)$ -module et  $\alpha^{(m',m)}: \mathcal{E}^{(m)} \rightarrow \mathcal{E}^{(m')}$  sont les morphismes  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(T)$ -linéaires de transition. Pour tout  $\chi \in M$ , on note de manière analogue à 1.1.1  $\chi^*(\mathcal{E}^{(\bullet)}) := (\mathcal{E}^{(m)}, p\chi^{(m')-\chi(m)}\alpha^{(m',m)})$ . En fait, on obtient le foncteur  $\chi^*: M(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \rightarrow M(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ , ce dernier étant l'identité sur les flèches entre les modules au niveau  $m$  fixé. De plus, comme pour 1.1.1, pour tout  $\lambda \in L$ , on note  $\lambda^*(\mathcal{E}^{(\bullet)}) := (\mathcal{E}^{(\lambda(m))}, \alpha^{(\lambda(m'), \lambda(m))})$ .

Comme pour 1.1.1, on définit le système multiplicatif des ind-isogénies (resp. des lim-ind-isogénies) de  $M(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  et on note  $\underline{M}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  (resp.  $S^{-1}M(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ ) la catégorie localisée par les ind-isogénies (resp. par les lim-ind-isogénies). Comme pour 1.1.1, on définit le système multiplicatif des lim-isomorphismes de  $\underline{M}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  et on note  $\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  la catégorie localisée.

Tous les résultats entre le lemme 1.1.2 et les remarques 1.1.6 restent valables pour les modules à la place des complexes. Par exemple, de manière identique à 1.1.4, on vérifie l'équivalence canonique de catégories  $S^{-1}M(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \cong \underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . Ainsi, les objets de  $\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  sont ceux de  $M(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  et ses flèches sont comme pour 1.1.5.1 données par la formule : pour tous  $\mathcal{E}^{(\bullet)}, \mathcal{F}^{(\bullet)} \in \underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$

$$\mathrm{Hom}_{\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))}(\mathcal{E}^{(\bullet)}, \mathcal{F}^{(\bullet)}) = \varinjlim_{\lambda \in L} \varinjlim_{\chi \in M} \mathrm{Hom}_{M(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))}(\mathcal{E}^{(\bullet)}, \lambda^* \chi^* \mathcal{F}^{(\bullet)}). \quad (1.2.1.1)$$

**1.2.2.** En remplaçant  $\mathcal{D}$  par  $D$ , on définit de manière identique à 1.2.1 les catégories  $M(\tilde{D}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ ,  $\underline{M}_{\mathbb{Q}}(\tilde{D}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ ,  $S^{-1}M(\tilde{D}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  et  $\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{D}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . De même, les résultats entre le lemme 1.1.2 et les remarques 1.1.6 sont toujours valables dans ce contexte.

**Lemme 1.2.3.** *Le foncteur canonique  $\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \rightarrow \underline{LD}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  est pleinement fidèle.*

*Démonstration.* Cela résulte du fait que l'application  $\mathrm{Hom}_{M(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))}(\mathcal{E}^{(\bullet)}, \lambda^* \chi^* \mathcal{F}^{(\bullet)}) \rightarrow \mathrm{Hom}_{D(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))}(\mathcal{E}^{(\bullet)}, \lambda^* \chi^* \mathcal{F}^{(\bullet)})$  est bijective et que l'on dispose des égalités 1.1.5.1 et 1.2.1.1.  $\square$

**Lemme 1.2.4.** *Soit  $N(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  la sous-catégorie pleine de  $M(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  des modules nuls dans  $\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ .*

1. *La catégorie  $N(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  est une sous-catégorie de Serre de  $M(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ .*
2. *On dispose de l'égalité :  $M(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))/N(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) = S^{-1}M(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \cong \underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . En particulier,  $\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  est une catégorie abélienne et le système multiplicatif des lim-ind-isogénies de  $M(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  est saturé.*

*Démonstration.* 1) Il est clair que  $N(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  est stable par isomorphismes. D'après l'analogie de la remarque 1.1.6 (on remplace les complexes par les modules), un objet  $\mathcal{E}^{(\bullet)}$  de  $M(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  est dans  $N(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  si et seulement s'il existe  $\chi \in M$ ,  $\lambda \in L$  tels que le morphisme canonique  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \rightarrow \lambda^* \chi^* \mathcal{E}^{(\bullet)}$  soit le morphisme nul. Il en résulte aussitôt que  $N(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  est stable par sous-objets, sous-quotients. De plus, soit  $0 \rightarrow \mathcal{F}^{(\bullet)} \rightarrow \mathcal{E}^{(\bullet)} \rightarrow \mathcal{G}^{(\bullet)} \rightarrow 0$  une suite exacte de  $M(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  telle que  $\mathcal{F}^{(\bullet)}, \mathcal{G}^{(\bullet)} \in N(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . Soient  $\chi \in M$ ,  $\lambda \in L$  tels que les morphismes canoniques  $\mathcal{F}^{(\bullet)} \rightarrow \lambda^* \chi^* \mathcal{F}^{(\bullet)}$  et  $\mathcal{G}^{(\bullet)} \rightarrow \lambda^* \chi^* \mathcal{G}^{(\bullet)}$  sont les morphismes nuls. Comme les foncteurs  $\chi^*$  et  $\lambda^*$  sont exacts, on obtient la suite exacte courte  $0 \rightarrow \lambda^* \chi^* \mathcal{F}^{(\bullet)} \rightarrow \lambda^* \chi^* \mathcal{E}^{(\bullet)} \rightarrow \lambda^* \chi^* \mathcal{G}^{(\bullet)} \rightarrow 0$  dans  $M(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . L'image du morphisme canonique  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \rightarrow \lambda^* \chi^* \mathcal{E}^{(\bullet)}$  est alors incluse dans  $\lambda^* \chi^* \mathcal{F}^{(\bullet)}$ . On en déduit que le morphisme canonique  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \rightarrow (\lambda \circ \lambda)^*(\chi \circ \chi)^* \mathcal{E}^{(\bullet)}$  est le morphisme nul.

2) Notons  $S_N$  le système multiplicatif saturé associé à la sous-catégorie de Serre  $N(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . Rappelons que les éléments de  $S_N$  sont les flèches de  $M(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  dont le noyau et le conoyau sont dans  $N(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . Il s'agit de vérifier que  $S_N = S$ .

a) Soit  $0 \rightarrow \mathcal{F}(\bullet) \rightarrow \mathcal{E}(\bullet) \rightarrow \mathcal{G}(\bullet) \rightarrow 0$  une suite exacte de  $M(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . Supposons  $\mathcal{F}(\bullet) \in N(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . Soient  $\chi \in M$ ,  $\lambda \in L$  tel que le morphisme canonique  $\mathcal{F}(\bullet) \rightarrow \lambda^* \chi^* \mathcal{F}(\bullet)$  soit nul. On obtient alors un morphisme  $\mathcal{G}(\bullet) \rightarrow \lambda^* \chi^* \mathcal{E}(\bullet)$  qui donne un inverse à  $\mathcal{E}(\bullet) \rightarrow \mathcal{G}(\bullet)$  dans  $S^{-1}M(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . De même, si  $\mathcal{G}(\bullet) \in N(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ , on vérifie que  $\mathcal{F}(\bullet) \rightarrow \mathcal{E}(\bullet)$  est un isomorphisme dans  $S^{-1}M(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ .

b) Soit  $\phi: \mathcal{E}(\bullet) \rightarrow \mathcal{F}(\bullet)$  un morphisme de  $M(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . En utilisant a), on vérifie que si  $\ker \phi$  et  $\operatorname{coker} \phi$  appartiennent à  $N(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ , alors  $\phi$  est un isomorphisme dans  $\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ , et donc  $\phi \in S$  d'après l'analogie de la seconde remarque à 1.1.5. Réciproquement, supposons que  $\phi$  soit une lim-ind-isogénie de  $M(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . Soient  $\chi \in M$ ,  $\lambda \in L$  tels qu'il existe un morphisme canonique  $\psi: \mathcal{F}(\bullet) \rightarrow \lambda^* \chi^* \mathcal{E}(\bullet)$  dans  $M(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  tel que  $\psi \circ \phi$  et  $\lambda^* \chi^* (\phi) \circ \psi$  sont les morphismes canoniques. On vérifie alors que la composition  $\ker \phi \rightarrow \lambda^* \chi^* \ker \phi \rightarrow \lambda^* \chi^* \mathcal{E}(\bullet)$  est le morphisme nul. Comme  $\lambda^* \chi^* \ker \phi \rightarrow \lambda^* \chi^* \mathcal{E}(\bullet)$  est un monomorphisme, il en résulte que le morphisme canonique  $\ker \phi \rightarrow \lambda^* \chi^* \ker \phi$  est nul. De même, on vérifie que la composition  $\mathcal{F}(\bullet) \rightarrow \operatorname{coker}(\phi) \rightarrow \lambda^* \chi^* \operatorname{coker}(\phi)$  est le morphisme nul. Comme  $\mathcal{F}(\bullet) \rightarrow \operatorname{coker}(\phi)$  est un épimorphisme, on en déduit que le morphisme canonique  $\operatorname{coker}(\phi) \rightarrow \lambda^* \chi^* \operatorname{coker}(\phi)$  est le morphisme nul.  $\square$

*Remarques 1.2.5.* Pour  $\sharp \in \{+, -, b, \emptyset\}$ , notons  $D_{N(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))}^{\sharp}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  la sous-catégorie pleine de  $D^{\sharp}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  des complexes dont les espaces de cohomologie sont dans  $N(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . Notons  $S_{Nqi}^{\sharp}$  le système multiplicatif saturé compatible à la triangulation de  $D^{\sharp}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  qui correspond à  $D_{N(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))}^{\sharp}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . Par définition, un morphisme  $f(\bullet)$  de  $D^{\sharp}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  appartient à  $S_{Nqi}^{\sharp}$  si et seulement si, pour tout triangle distingué (il en suffit d'un en fait) dans  $D^{\sharp}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  de la forme  $\mathcal{E}(\bullet) \xrightarrow{f(\bullet)} \mathcal{F}(\bullet) \rightarrow \mathcal{G}(\bullet) \rightarrow \mathcal{E}(\bullet)[1]$ , pour tout entier  $n \in \mathbb{Z}$ , on ait  $\mathcal{H}^n(\mathcal{G}(\bullet)) \in N(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . Il découle du théorème [Miy91, 3.1] (on ne peut pas utiliser sa version plus faible et plus agréable à démontrer de [BP09, 2.6.2] car comme la sous-catégorie  $N(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  de  $M(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  n'est pas stable par limite inductive filtrante, le foncteur oubli  $N(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \rightarrow M(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  ne possède pas de foncteur adjoint à droite), le foncteur canonique  $D^{\sharp}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \rightarrow D^{\sharp}(\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)))$  induit canoniquement l'équivalence de catégories

$$S_{Nqi}^{\sharp-1} D^{\sharp}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \cong D^{\sharp}(\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))). \quad (1.2.5.1)$$

**1.2.6.** Pour tout entier  $n \in \mathbb{Z}$ , on dispose du foncteur  $n$ -ième espace de cohomologie  $\mathcal{H}^n: D(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \rightarrow M(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  défini pour  $\mathcal{E}(\bullet) = (\mathcal{E}^{(m)}, \alpha^{(m',m)}) \in D(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  en posant  $\mathcal{H}^n(\mathcal{E}(\bullet)) = (\mathcal{H}^n(\mathcal{E}^{(m)}), \mathcal{H}^n(\alpha^{(m',m)}))$ . On dispose de l'isomorphisme canonique  $\mathcal{H}^n \lambda^* \chi^* (\mathcal{E}(\bullet)) \xrightarrow{\sim} \lambda^* \chi^* \mathcal{H}^n(\mathcal{E}(\bullet))$  qui s'inscrit dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^n(\mathcal{E}(\bullet)) & \longrightarrow & \mathcal{H}^n \lambda^* \chi^* (\mathcal{E}(\bullet)) \\ \parallel & & \downarrow \sim \\ \mathcal{H}^n(\mathcal{E}(\bullet)) & \longrightarrow & \lambda^* \chi^* \mathcal{H}^n(\mathcal{E}(\bullet)) \end{array}$$

dont la flèche horizontale du bas est la flèche canonique tandis que celle du haut est l'image par  $\mathcal{H}^n$  du morphisme canonique. On en déduit que le foncteur  $\mathcal{H}^n$  envoie les lim-ind-isogénies sur les lim-ind-isogénies. Le foncteur  $\mathcal{H}^n$  se factorise alors en  $\mathcal{H}^n: \underline{LD}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \rightarrow \underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ .

**Lemme 1.2.7.** *Le foncteur  $\mathcal{H}^n: \underline{LD}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \rightarrow \underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  défini dans 1.2.6 est un foncteur cohomologique.*

*Démonstration.* Par construction, un triangle distingué de  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  est isomorphe dans  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  à l'image d'un triangle distingué de  $K(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  par le foncteur canonique de localisation  $K(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \rightarrow \underline{LD}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . Comme  $\mathcal{H}^n: K(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \rightarrow M(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  est un foncteur cohomologique, comme le foncteur de localisation  $M(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \rightarrow \underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  préserve les suites exactes (cela résulte des propriétés des localisations par une sous-catégorie de Serre et de 1.2.4), on en déduit le résultat.

□

*Notations 1.2.8.* Notons  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}}^0(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  la sous-catégorie strictement pleine de  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  des complexes  $\mathcal{E}^{(\bullet)}$  tels que pour tout entier  $n \neq 0$  on ait  $\mathcal{H}^n(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \xrightarrow{\sim} 0$  dans  $\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ .

*Remarques 1.2.9.* Soit  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . Par définition,  $\mathcal{E}^{(\bullet)}$  est un objet de  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  si et seulement si  $\mathcal{E}^{(\bullet)}$  est un objet de  $D^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . Cette condition est a priori plus forte que de demander qu'il existe  $N \in \mathbb{N}$  assez grand tel que, pour tout  $j \notin [-N, N] \cap \mathbb{Z}$  on ait l'isomorphisme  $\mathcal{H}^j(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \xrightarrow{\sim} 0$  dans  $\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . Il n'est donc pas clair que  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  soit une sous-catégorie strictement pleine de  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ .

**Lemme 1.2.10.** *Le foncteur canonique  $\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \rightarrow \underline{LD}_{\mathbb{Q}}^0(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  est une équivalence de catégories. De plus, le foncteur  $\mathcal{H}^0 : \underline{LD}_{\mathbb{Q}}^0(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \rightarrow \underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  est une équivalence de catégories quasi-inverse.*

*Démonstration.* Il résulte de 1.2.3 que le premier foncteur est pleinement fidèle. Soit  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}}^0(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . Il reste à prouver qu'il existe dans  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  un isomorphisme de la forme  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^0(\mathcal{E}^{(\bullet)})$ . Comme  $\mathcal{E}^{(\bullet)}$  est un objet de  $D^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  assez grand tel que, pour tout  $j \notin [-N, N] \cap \mathbb{Z}$  on ait l'isomorphisme  $\mathcal{H}^j(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \xrightarrow{\sim} 0$  dans  $M(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . Pour tout entier  $n \in \mathbb{Z}$ , on note  $\sigma_{\geq n}(\mathcal{E}^{(\bullet)})$  et  $\sigma_{\leq n}(\mathcal{E}^{(\bullet)})$  les troncations cohomologiques usuelles (voir les notations après la proposition [Har66, I.7.1]). On dispose ainsi par définition pour tout entier  $n \in \mathbb{Z}$  de la suite exacte dans  $C(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  de la forme :  $0 \rightarrow \sigma_{\leq -n-1}(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \rightarrow \mathcal{E}^{(\bullet)} \rightarrow \sigma_{\geq -n}(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \rightarrow 0$ .

1) Vérifions  $\sigma_{\leq -1}(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \xrightarrow{\sim} 0$  dans  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ .

a) Posons  $\mathcal{F}^{(\bullet)} := \sigma_{\leq -1}(\mathcal{E}^{(\bullet)})$ . On dispose alors dans  $D(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  de l'isomorphisme  $\sigma_{\leq -N-1}(\mathcal{F}^{(\bullet)}) = \sigma_{\leq -N-1}(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \xrightarrow{\sim} 0$ . En considérant la suite exacte de  $C(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  :  $0 \rightarrow \sigma_{\leq -N-1}(\mathcal{F}^{(\bullet)}) \rightarrow \mathcal{F}^{(\bullet)} \rightarrow \sigma_{\geq -N}(\mathcal{F}^{(\bullet)}) \rightarrow 0$ , on en déduit que le morphisme canonique  $\mathcal{F}^{(\bullet)} \rightarrow \sigma_{\geq -N}(\mathcal{F}^{(\bullet)})$  est un isomorphisme de  $D(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ .

b) Pour tout  $j \in [-N, -1] \cap \mathbb{Z}$ , on dispose d'après [Har66, I.7.2] du triangle distingué dans  $D(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  :

$$\mathcal{H}^j(\mathcal{F}^{(\bullet)}) \rightarrow \sigma_{\geq j}(\mathcal{F}^{(\bullet)}) \rightarrow \sigma_{\geq j+1}(\mathcal{F}^{(\bullet)}) \rightarrow +1.$$

Comme, pour tout  $j \in [-N, -1] \cap \mathbb{Z}$ ,  $\mathcal{H}^j(\mathcal{F}^{(\bullet)}) = \mathcal{H}^j(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \xrightarrow{\sim} 0$  dans  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ , il en résulte que la flèche  $\sigma_{\geq j}(\mathcal{F}^{(\bullet)}) \rightarrow \sigma_{\geq j+1}(\mathcal{F}^{(\bullet)})$  est un isomorphisme dans  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . D'où  $\sigma_{\geq -N}(\mathcal{F}^{(\bullet)}) \xrightarrow{\sim} \sigma_{\geq 0}(\mathcal{F}^{(\bullet)})$  dans  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ .

c) Comme on a dans  $D(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  l'isomorphisme  $\sigma_{\geq 0}(\mathcal{F}^{(\bullet)}) = \sigma_{\geq 0}(\sigma_{\leq -1}(\mathcal{E}^{(\bullet)})) \xrightarrow{\sim} 0$ , il résulte des étapes a) et b) que  $\mathcal{F}^{(\bullet)} \xrightarrow{\sim} 0$  dans  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ .

2) Démontrons à présent que le morphisme canonique  $\mathcal{H}^0(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \rightarrow \sigma_{\geq 0}(\mathcal{E}^{(\bullet)})$  (voir sa construction dans [Har66, I.7.2]) est un isomorphisme dans  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ .

Posons  $\mathcal{G}^{(\bullet)} := \sigma_{\geq 0}(\mathcal{E}^{(\bullet)})$ . De même que pour l'étape 1.b), on vérifie que le morphisme canonique  $\sigma_{\geq 1}(\mathcal{E}^{(\bullet)}) = \sigma_{\geq 1}(\mathcal{G}^{(\bullet)}) \rightarrow \sigma_{\geq N+1}(\mathcal{G}^{(\bullet)})$  est un isomorphisme dans  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . Comme  $\sigma_{\geq N+1}(\mathcal{G}^{(\bullet)}) = \sigma_{\geq N+1}(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \xrightarrow{\sim} 0$  dans  $D(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ , il en résulte que  $\sigma_{\geq 1}(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \xrightarrow{\sim} 0$  dans  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . En considérant le triangle distingué de  $D(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  (voir [Har66, I.7.2])

$$\mathcal{H}^0(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \rightarrow \sigma_{\geq 0}(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \rightarrow \sigma_{\geq 1}(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \rightarrow +1,$$

on en déduit le résultat.

3) Via 1) et 2), on conclut grâce à la suite exacte  $0 \rightarrow \sigma_{\leq -1}(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \rightarrow \mathcal{E}^{(\bullet)} \rightarrow \sigma_{\geq 0}(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \rightarrow 0$  dans  $C(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . □

**Corollaire 1.2.11.** *Avec les notations 1.2.5, on dispose de l'égalité  $S^b = S_{Nqi}^b$ . Pour  $\sharp \in \{+, -, b, \emptyset\}$ , on dispose de l'inclusion  $S^\sharp \subset S_{Nqi}^\sharp$ . Le morphisme canonique  $D^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \rightarrow D^b(\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)))$  induit par le foncteur de localisation*



$M(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \rightarrow \underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  se factorise canoniquement en l'équivalence de catégories

$$\underline{LD}_{\mathbb{Q}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \cong D^b(\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))). \quad (1.2.11.1)$$

*Démonstration.* 1) Vérifions d'abord l'inclusion  $S_{Nqi}^b \subset S^b$ . Soient  $f^{(\bullet)} \in S_{Nqi}^b$  et un triangle distingué dans  $D^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  de la forme  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \xrightarrow{f^{(\bullet)}} \mathcal{F}^{(\bullet)} \rightarrow \mathcal{G}^{(\bullet)} \rightarrow \mathcal{E}^{(\bullet)}[1]$ . Par définition, pour tout entier  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $\mathcal{H}^n(\mathcal{G}^{(\bullet)}) \in N(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . Autrement dit, pour tout entier  $n \in \mathbb{Z}$ , on a  $\mathcal{H}^n(\mathcal{G}^{(\bullet)}) \xrightarrow{\sim} 0$  dans  $\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . D'après 1.2.10, cela entraîne que  $\mathcal{G}^{(\bullet)} \xrightarrow{\sim} 0$  dans  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . D'après les propriétés concernant les catégories triangulées,  $f^{(\bullet)}$  est donc un isomorphisme dans  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . D'après la remarque 1.1.6, on obtient alors que  $f^{(\bullet)} \in S^b$ .

2) Vérifions à présent l'inclusion  $S^{\sharp} \subset S_{Nqi}^{\sharp}$ . Soit  $f^{(\bullet)}: \mathcal{E}^{(\bullet)} \rightarrow \mathcal{F}^{(\bullet)}$  un morphisme de  $D^{\sharp}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . Comme le foncteur espace de cohomologie  $\mathcal{H}^0: D^{\sharp}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \rightarrow \underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  est un foncteur cohomologique local, en considérant la suite exacte longue dans  $\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  déduite du triangle distingué dans  $D^{\sharp}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  de la forme  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \xrightarrow{f^{(\bullet)}} \mathcal{F}^{(\bullet)} \rightarrow \mathcal{G}^{(\bullet)} \rightarrow \mathcal{E}^{(\bullet)}[1]$ , on vérifie que  $f^{(\bullet)} \in S_{Nqi}^{\sharp}$  si et seulement si, pour tout entier  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $\mathcal{H}^n(f^{(\bullet)})$  est un isomorphisme dans  $\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  (qui est une catégorie abélienne). Or, si  $f^{(\bullet)} \in S^{\sharp}$ , alors son image dans  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}}^{\sharp}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  est un isomorphisme. Comme le foncteur  $\mathcal{H}^n: D^{\sharp}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \rightarrow \underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  se factorise par  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}}^{\sharp}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \rightarrow \underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ , on en déduit l'inclusion  $S^{\sharp} \subset S_{Nqi}^{\sharp}$  voulue.

3) Enfin l'équivalence canonique de catégories résulte de celle  $S_{Nqi}^{\sharp-1} D^{\sharp}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \cong D^{\sharp}(\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)))$  de 1.2.5.1 ainsi que du lemme 1.1.4.  $\square$

**Corollaire 1.2.12.** Soit  $\phi: \mathcal{E}^{(\bullet)} \rightarrow \mathcal{F}^{(\bullet)}$  un morphisme dans  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . Le morphisme  $\phi$  est un isomorphisme dans  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  si et seulement si, pour tout entier  $n \in \mathbb{Z}$ , le morphisme  $\mathcal{H}^n(\phi): \mathcal{H}^n(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \rightarrow \mathcal{H}^n(\mathcal{F}^{(\bullet)})$  est un isomorphisme de  $\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ .

*Démonstration.* Il existe un triangle distingué dans  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  de la forme  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \xrightarrow{\phi} \mathcal{F}^{(\bullet)} \rightarrow \mathcal{G}^{(\bullet)} \rightarrow \mathcal{E}^{(\bullet)}[1]$ . D'après les propriétés concernant les catégories triangulées,  $\phi$  est un isomorphisme si et seulement si  $\mathcal{G}^{(\bullet)} \xrightarrow{\sim} 0$  dans  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . D'après 1.2.10, cela est équivalent à dire que, pour tout entier  $n \in \mathbb{Z}$ , on ait  $\mathcal{H}^n(\mathcal{G}^{(\bullet)}) \xrightarrow{\sim} 0$  dans  $\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . Le lemme 1.2.7 nous permet de conclure.  $\square$

### 1.3 Propriétés locales

**Lemme 1.3.1.** Le fait qu'un objet de  $M(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  soit un objet de  $N(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  est local en  $\mathcal{P}$ .

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{E}^{(\bullet)}$  un  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$ -module. D'après l'analogie de la seconde remarque 1.1.6 (on remplace les complexes par les modules), le fait que  $\mathcal{E}^{(\bullet)}$  soit un objet de  $N(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  équivaut à dire qu'il existe  $\chi \in M$  et  $\lambda \in L$  tels que la flèche canonique  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \rightarrow \lambda^* \chi^* \mathcal{E}^{(\bullet)}$  soit le morphisme nul (dans la catégorie  $M(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ ). Soit  $(\mathcal{P}_i)_{i \in I}$  un recouvrement ouvert de  $\mathcal{P}$  tel que, pour tout  $i \in I$ , il existe  $\chi_i \in M$  et  $\lambda_i \in L$  tels que la flèche canonique  $\mathcal{E}^{(\bullet)}|_{\mathcal{P}_i} \rightarrow \lambda_i^* \chi_i^* \mathcal{E}^{(\bullet)}|_{\mathcal{P}_i}$  soit le morphisme nul. Comme  $\mathcal{P}$  est quasi-compact, on peut supposer  $I$  fini. Il existe donc  $\chi \in M$  et  $\lambda \in L$  tels que, pour tout  $i \in I$ , on ait  $\chi \geq \chi_i$  et  $\lambda \geq \lambda_i$ . Pour tout  $i \in I$ , le morphisme canonique  $\mathcal{E}^{(\bullet)}|_{\mathcal{P}_i} \rightarrow \lambda^* \chi^* \mathcal{E}^{(\bullet)}|_{\mathcal{P}_i}$  est donc le morphisme nul.  $\square$

**Lemme 1.3.2.** Soit  $f: \mathcal{E}^{(\bullet)} \rightarrow \mathcal{F}^{(\bullet)}$  un morphisme de  $\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . Le fait que ce morphisme soit un monomorphisme (resp. un épimorphisme, resp. un isomorphisme) est local en  $\mathcal{P}$ .

*Démonstration.* On sait déjà que  $\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  est une catégorie abélienne (voir 1.2.4). Or, d'après le lemme 1.3.1, le fait d'être nul dans  $\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  est local en  $\mathcal{P}$ . D'où le résultat.  $\square$

**Proposition 1.3.3.** *Soit  $\phi: \mathcal{E}^{(\bullet)} \rightarrow \mathcal{F}^{(\bullet)}$  un morphisme dans  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . Le fait que le morphisme  $\phi$  soit un isomorphisme est local en  $\mathcal{P}$ .*

*Démonstration.* Cela résulte de 1.3.2 et 1.2.12.  $\square$

**Lemme 1.3.4.** *Soit  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . La propriété  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}}^0(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  est locale en  $\mathcal{P}$ .*

*Démonstration.* D'après 1.3.2, pour tout entier  $n \in \mathbb{Z}$ , la propriété  $\mathcal{H}^n(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \xrightarrow{\sim} 0$  dans  $\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  est locale en  $\mathcal{P}$ .  $\square$

**Lemme 1.3.5.** *Soient  $\mathcal{E}^{(\bullet)}, \mathcal{F}^{(\bullet)}$  deux objets de  $M(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . La construction d'un morphisme dans  $\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  de la forme  $f: \mathcal{E}^{(\bullet)} \rightarrow \mathcal{F}^{(\bullet)}$  est locale en  $\mathcal{P}$ .*

*Démonstration.* Soient  $(\mathcal{P}_i)_{i \in I}$  un recouvrement ouvert de  $\mathcal{P}$  et pour tout  $i \in I$  des morphismes  $f_i: \mathcal{E}^{(\bullet)}|_{\mathcal{P}_i} \rightarrow \mathcal{F}^{(\bullet)}|_{\mathcal{P}_i}$  dans  $\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}_i}^{(\bullet)}(T \cap \mathcal{P}_i))$  tels  $f_i|_{\mathcal{P}_i \cap \mathcal{P}_j} = f_j|_{\mathcal{P}_i \cap \mathcal{P}_j}$  pour tous  $i, j \in I$ . Comme  $\mathcal{P}$  est quasi-compact, on peut supposer  $I$  fini. Comme une famille finie d'éléments de  $L$  (resp. de  $M$ ) est majorée par un élément de  $L$  (resp. de  $M$ ), quitte à augmenter les éléments de  $L$  ou  $M$  qui apparaissent dans un choix de représentant des morphismes  $f_i$ , on peut supposer qu'il existe  $\lambda \in L$  et  $\chi \in M$ , des morphismes  $a_i: \mathcal{E}^{(\bullet)}|_{\mathcal{P}_i} \rightarrow \lambda^* \chi^* \mathcal{F}^{(\bullet)}|_{\mathcal{P}_i}$  dans  $M(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}_i}^{(\bullet)}(T \cap \mathcal{P}_i))$  représentant  $f_i$ . Quitte à nouveau à augmenter  $\lambda$  et  $\chi$ , on peut en outre supposer que  $a_i|_{\mathcal{P}_i \cap \mathcal{P}_j} = a_j|_{\mathcal{P}_i \cap \mathcal{P}_j}$ . On obtient donc un morphisme  $a: \mathcal{E}^{(\bullet)} \rightarrow \lambda^* \chi^* \mathcal{F}^{(\bullet)}$  dans  $M(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  tel que  $a_i = a|_{\mathcal{P}_i}$ . D'où le résultat.  $\square$

**Lemme 1.3.6.** *Soient  $f, g: \mathcal{E}^{(\bullet)} \rightarrow \mathcal{F}^{(\bullet)}$  deux morphismes de  $\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . L'égalité  $f = g$  dans  $\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  est locale en  $\mathcal{P}$ .*

*Démonstration.* L'égalité  $f = g$  équivaut à dire que le morphisme canonique  $\ker(f - g) \rightarrow \mathcal{E}^{(\bullet)}$  est un isomorphisme. Cela résulte alors de 1.3.2.  $\square$

## 1.4 Bifoncteurs homomorphismes

**Proposition 1.4.1.** *Soient  $\mathcal{E}^{(\bullet)}, \mathcal{F}^{(\bullet)}$  deux objets de  $\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . Notons  $\mathcal{H}om_{\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))}(\mathcal{E}^{(\bullet)}, \mathcal{F}^{(\bullet)})$  le préfaisceau en groupes abéliens sur  $\mathcal{P}$  défini par  $\mathcal{U} \mapsto \text{Hom}_{\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{U}}^{(\bullet)}(T \cap \mathcal{U}))}(\mathcal{E}^{(\bullet)}|_{\mathcal{U}}, \mathcal{F}^{(\bullet)}|_{\mathcal{U}})$ . Alors  $\mathcal{H}om_{\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))}(\mathcal{E}^{(\bullet)}, \mathcal{F}^{(\bullet)})$  est un faisceau.*

*Démonstration.* La proposition équivaut aux lemmes 1.3.5 et 1.3.6.  $\square$

*Notations 1.4.2.* Notons  $\text{Ab}_{\mathcal{P}}$  la catégorie abélienne des faisceaux en groupes abéliens sur  $\mathcal{P}$ . Soient  $\mathcal{E}^{(\bullet)}, \bullet, \mathcal{F}^{(\bullet)}, \bullet \in K(\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)))$  (exceptionnellement, on indique le deuxième  $\bullet$  pour préciser les notations qui suivent). Avec les notations de la proposition 1.4.1, on dispose du bifoncteur

$$\mathcal{H}om_{\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))}^{\bullet}(-, -): K(\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))) \times K(\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))) \rightarrow K(\text{Ab}_{\mathcal{P}})$$

dont le  $n$ -ème terme pour tout entier  $n \in \mathbb{Z}$  est défini en posant :

$$\mathcal{H}om_{\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))}^n(\mathcal{E}^{(\bullet)}, \bullet, \mathcal{F}^{(\bullet)}, \bullet) := \prod_{p \in \mathbb{Z}} \mathcal{H}om_{\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))}(\mathcal{E}^{(\bullet), p}, \mathcal{F}^{(\bullet), p+n}) \quad (1.4.2.1)$$

et les morphismes de transition sont donnés par la formule  $d = d_{\mathcal{E}} + (-1)^{n+1} d_{\mathcal{F}}$ .

*Notations 1.4.3.* Notons  $\text{Ab}$  la catégorie des groupes abéliens. De manière analogue au paragraphe 1.4.3, en remplaçant partout «  $\mathcal{H}om$  » par «  $\text{Hom}$  », on construit le bifoncteur (qui est d'ailleurs le bifoncteur classique des homomorphismes de la catégorie abélienne  $\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ ) :

$$\text{Hom}_{\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))}^{\bullet}(-, -) : K(\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))) \times K(\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))) \rightarrow K(\text{Ab}).$$

**Lemme 1.4.4.** Soient  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}'_1, \mathcal{C}$  des catégories triangulées,  $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}'_1, \mathcal{N}$  des systèmes nuls (voir la définition de [KS06, 10.2.2]) de respectivement  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}'_1, \mathcal{C}$ . Soient  $\mathcal{N}_2, \mathcal{N}'_2$  des systèmes nuls de respectivement  $\mathcal{C}_2 := \mathcal{C}_1/\mathcal{N}_1, \mathcal{C}'_2 := \mathcal{C}'_1/\mathcal{N}'_1$ . Soient  $\mathcal{N}_3, \mathcal{N}'_3$  des systèmes nuls de respectivement  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}'_1$  tels que  $\mathcal{C}_1/\mathcal{N}_3 = \mathcal{C}_2/\mathcal{N}_2, \mathcal{C}'_1/\mathcal{N}'_3 = \mathcal{C}'_2/\mathcal{N}'_2$ . Soit  $F : \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}'_1 \rightarrow \mathcal{C}$  un bifoncteur triangulé. On suppose que la localisation à droite de  $F$  par rapport à  $(\mathcal{N}_1 \times \mathcal{N}'_1, \mathcal{N})$  existe (voir la définition [KS06, 10.3.7]) et se note  $\mathbb{R}_{\mathcal{N}_1 \times \mathcal{N}'_1}^{\mathcal{N}} F$ . Si l'une des conditions :

1. la localisation à droite de  $F$  par rapport à  $(\mathcal{N}_3 \times \mathcal{N}'_3, \mathcal{N})$  existe,
2. la localisation à droite de  $\mathbb{R}_{\mathcal{N}_1 \times \mathcal{N}'_1}^{\mathcal{N}} F$  par rapport à  $(\mathcal{N}_2 \times \mathcal{N}'_2, \mathcal{N})$  existe

est satisfaite, alors la seconde aussi et on dispose dans ce cas de l'isomorphisme de bifoncteurs

$$\mathbb{R}_{\mathcal{N}_2 \times \mathcal{N}'_2}^{\mathcal{N}} \mathbb{R}_{\mathcal{N}_1 \times \mathcal{N}'_1}^{\mathcal{N}} F \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}_{\mathcal{N}_3 \times \mathcal{N}'_3}^{\mathcal{N}} F.$$

*Démonstration.* Cela découle aussitôt de la propriété universelle des localisations à droite.  $\square$

*Notations 1.4.5* (Bifoncteur faisceau des homomorphismes de Berthelot). Soient  $\mathcal{E}^{(\bullet)}, \bullet \in K^{-}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)), \mathcal{F}^{(\bullet)}, \bullet \in K^{+}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . Berthelot a considéré le bifoncteur

$$\varinjlim_{\lambda \in L, \chi \in M} \mathcal{H}om_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)}^{\bullet}(-, \lambda^* \chi^* -) : K^{-}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))^{\circ} \times K^{+}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \rightarrow K(\text{Ab}_{\mathcal{P}})$$

dont le  $n$ -ème terme pour tout entier  $n \in \mathbb{Z}$  est défini en posant

$$\varinjlim_{\lambda \in L, \chi \in M} \mathcal{H}om_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)}^n(\mathcal{E}^{(\bullet)}, \bullet, \lambda^* \chi^* \mathcal{F}^{(\bullet)}, \bullet) := \varinjlim_{\lambda \in L, \chi \in M} \prod_{p \in \mathbb{Z}} \mathcal{H}om_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)}(\mathcal{E}^{(\bullet), p}, \lambda^* \chi^* \mathcal{F}^{(\bullet), p+n}) \quad (1.4.5.1)$$

et les morphismes de transition sont donnés par la formule  $d = d_{\mathcal{E}} + (-1)^{n+1} d_{\mathcal{F}}$ . Berthelot a vérifié que ce bifoncteur

$\varinjlim_{\lambda \in L, \chi \in M} \mathcal{H}om_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)}^{\bullet}(-, \lambda^* \chi^* -)$  est localisable à droite en le dérivé droit de la forme

$$\mathbb{R} \varinjlim_{\lambda \in L, \chi \in M} \mathcal{H}om_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)}^{\bullet}(-, \lambda^* \chi^* -) : \underline{LD}_{\mathbb{Q}}^{-}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))^{\circ} \times \underline{LD}_{\mathbb{Q}}^{+}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \rightarrow D(\text{Ab}_{\mathcal{P}}). \quad (1.4.5.2)$$

Il note  $\mathbb{R} \mathcal{H}om_{\underline{LD}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))}(-, -) := \mathbb{R} \varinjlim_{\lambda \in L, \chi \in M} \mathcal{H}om_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)}^{\bullet}(-, \lambda^* \chi^* -)$ , ce foncteur dérivé droit qui se résout (i.e.,

on applique le théorème d'existence [KS06, 10.3.9]) en prenant des résolutions injectives du terme de droite et des résolutions plates d'un certain type du terme de gauche.

**1.4.6** (Bifoncteur homomorphisme de Berthelot). Soient  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}}^{-}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)), \mathcal{F}^{(\bullet)} \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}}^{+}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . De manière analogue à 1.4.5, en remplaçant  $\mathcal{H}om$  par  $\text{Hom}$ , Berthelot a construit le bifoncteur

$$\mathbb{R} \text{Hom}_{\underline{LD}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))}(-, -) : \underline{LD}_{\mathbb{Q}}^{-}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))^{\circ} \times \underline{LD}_{\mathbb{Q}}^{+}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \rightarrow D^{+}(\text{Ab}) \quad (1.4.6.1)$$

tel que  $H^0(\mathbb{R} \text{Hom}_{\underline{LD}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))}(\mathcal{E}^{(\bullet)}, \mathcal{F}^{(\bullet)})) = \text{Hom}_{\underline{LD}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))}(\mathcal{E}^{(\bullet)}, \mathcal{F}^{(\bullet)})$ . Il a de plus vérifié l'isomorphisme de bifoncteurs

$$\mathbb{R} \Gamma(\mathcal{P}, -) \circ \mathbb{R} \mathcal{H}om_{\underline{LD}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))}(-, -) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R} \text{Hom}_{\underline{LD}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))}(-, -). \quad (1.4.6.2)$$

**1.4.7.** Pour  $\sharp \in \{-, +, b\}$ , notons  $Q_N: K^\sharp(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \rightarrow K^\sharp(\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)))$  le foncteur canonique. D'après la remarque après le théorème [Miy91, 3.2], le foncteur  $Q_N$  est un quotient. Soit  $\mathcal{N}_N$  le système nul correspondant à ce quotient. De plus, le foncteur  $Q - N$  induit par localisation l'équivalence de catégories de 1.2.11.1 notée  $Q_{eq}: \underline{LD}_{\mathbb{Q}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \cong D^b(\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)))$ . Notons enfin  $Q_{is}$  le système nul des quasi-isomorphismes de  $K(\text{Ab}_{\mathcal{P}})$  et  $Q: K(\text{Ab}_{\mathcal{P}}) \rightarrow D(\text{Ab}_{\mathcal{P}})$ , le foncteur canonique. Avec les notations des paragraphes 1.4.2 et 1.4.5, on dispose de l'égalité

$$\lim_{\lambda \in L, \chi \in M} \mathcal{H}om_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)}^{\bullet}(-, \lambda^* \chi^* -) = \mathcal{H}om_{\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))}^{\bullet}(Q_N(-), Q_N(-)).$$

En d'autres termes, la localisation à droite du bifoncteur  $\lim_{\lambda \in L, \chi \in M} \mathcal{H}om_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)}^{\bullet}(-, \lambda^* \chi^* -)$  par rapport à  $(\mathcal{N}_N \times \mathcal{N}_N, Q_{is})$  existe et est égal à  $Q \circ \mathcal{H}om_{\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))}^{\bullet}(-, -)$ . Grâce à l'existence vérifiée par Berthelot du foncteur dérivé droit de  $\lim_{\lambda \in L, \chi \in M} \mathcal{H}om_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)}^{\bullet}(-, \lambda^* \chi^* -)$  (voir 1.4.5), grâce à l'équivalence de catégories  $Q_{eq}$ , en utilisant le lemme 1.4.4, on obtient alors que le bifoncteur  $\mathcal{H}om_{\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))}^{\bullet}(-, -)$  est localisable à droite en le bifoncteur que l'on notera

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{D(\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)))}(-, -): D^b(\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)))^{\circ} \times D^b(\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))) \rightarrow D(\text{Ab}_{\mathcal{P}}).$$

Par propriété universelle des foncteurs dérivés droits, on dispose de l'isomorphisme canonique de bifoncteurs  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))^{\circ} \times \underline{LD}_{\mathbb{Q}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \rightarrow D(\text{Ab}_{\mathcal{P}})$  de la forme

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\underline{LD}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))}(-, -) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{D(\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)))}(Q_{eq}(-), Q_{eq}(-)).$$

**1.4.8.** De manière identique à 1.4.7, on vérifie que le bifoncteur  $\mathcal{H}om_{\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))}^{\bullet}(-, -)$  est localisable à droite en le bifoncteur que l'on notera

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{D(\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)))}(-, -): D^b(\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)))^{\circ} \times D^b(\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))) \rightarrow D(\text{Ab}).$$

Par propriété universelle des foncteurs dérivés droits, on dispose de plus de l'isomorphisme canonique de bifoncteurs  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))^{\circ} \times \underline{LD}_{\mathbb{Q}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \rightarrow D(\text{Ab})$  de la forme

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\underline{LD}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))}(-, -) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{D(\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)))}(Q_{eq}(-), Q_{eq}(-)).$$

Ce morphisme provient du morphisme analogue sans les dérivés droits. On déduit alors de 1.4.6 que l'on dispose de l'isomorphisme de bifoncteurs  $D^b(\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)))^{\circ} \times D^b(\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))) \rightarrow \text{Ab}$  de la forme :

$$\mathcal{H}^0(\mathbb{R}\mathcal{H}om_{D(\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)))}(-, -)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om_{D(\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)))}(-, -). \quad (1.4.8.1)$$

On déduit de 1.4.6.2 l'isomorphisme de bifoncteurs  $D^b(\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)))^{\circ} \times D^b(\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))) \rightarrow D(\text{Ab})$  de la forme

$$\mathbb{R}\Gamma(\mathcal{P}, -) \circ \mathbb{R}\mathcal{H}om_{D(\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)))}(-, -) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{D(\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)))}(-, -). \quad (1.4.8.2)$$

**1.4.9.** Notons  $M(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}})$  la catégorie abélienne des  $\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -modules. En tensorisant par  $\mathbb{Q}$  puis en passant à la limite inductive sur le niveau, on obtient le foncteur  $\varinjlim: M(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \rightarrow M(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}})$ . Comme il transforme les lim-ind-isomorphismes en isomorphisme, il se factorise canoniquement en le foncteur

$$\varinjlim: \underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \rightarrow M(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}). \quad (1.4.9.1)$$

**1.4.10.** Soient  $\mathcal{E}^{(\bullet)}, \mathcal{F}^{(\bullet)}$  deux objets de  $K^b(\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)))$ . Via le foncteur  $\varinjlim: K^b(\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))) \rightarrow K^b(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}})$  déduit 1.4.9.1, on obtient le morphisme de  $K(\text{Ab}_{\mathcal{P}})$  suivant :

$$\mathcal{H}om_{\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))}^{\bullet}(\mathcal{E}^{(\bullet)}, \mathcal{F}^{(\bullet)}) \rightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}}^{\bullet}(\varinjlim \mathcal{E}^{(\bullet)}, \varinjlim \mathcal{F}^{(\bullet)}). \quad (1.4.10.1)$$

Comme le foncteur  $\varinjlim: K^b(\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))) \rightarrow K^b(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}})$  transforme complexe acyclique en complexe acyclique, il se factorise donc en le foncteur  $\varinjlim: D^b(\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))) \rightarrow D^b(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}})$  qui commute au foncteur canonique de localisation  $Q: K^b(\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))) \rightarrow D^b(\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)))$  et  $Q: K^b(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}) \rightarrow D^b(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}})$ , i.e.  $Q \circ \varinjlim \xrightarrow{\sim} \varinjlim \circ Q$ . On dispose ainsi des morphisme de bifoncteurs  $K^b(\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))) \times K^b(\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))) \rightarrow D(\text{Ab}_{\mathcal{P}})$  :

$$Q \circ \mathcal{H}om_{\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))}^{\bullet} \xrightarrow{1.4.10.1} Q \circ \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}}^{\bullet} \circ \varinjlim \rightarrow \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}} \circ Q \circ \varinjlim \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}} \circ \varinjlim \circ Q.$$

Par propriété universelle du bifoncteur dérivé droit, il existe donc un morphisme canonique de la forme

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{D(\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)))}(-, -) \rightarrow \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}}(-, -) \circ \varinjlim \quad (1.4.10.2)$$

de bifoncteurs  $D^b(\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))) \times D^b(\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))) \rightarrow D(\text{Ab}_{\mathcal{P}})$ .

Par propriété universelle du bifoncteur dérivé droit, on vérifie de la même manière qu'il existe un morphisme canonique de la forme

$$\mathbb{R}\text{Hom}_{D(\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)))}(-, -) \rightarrow \mathbb{R}\text{Hom}_{\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}}(-, -) \circ \varinjlim \quad (1.4.10.3)$$

de bifoncteurs  $D^b(\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))) \times D^b(\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))) \rightarrow D(\text{Ab})$ .

*Remarques 1.4.11.* Si la catégorie abélienne  $\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  possédait assez d'injectifs (ce que j'ignore), avec les deux lemmes qui suivent, on pourrait alors résoudre comme d'habitude le bifoncteur  $\mathcal{H}om_{\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))}^{\bullet}(-, -)$ .

**1.4.12** (Stabilité de l'injectivité par image inverse par une immersion ouverte). Soit  $j: \mathcal{U} \hookrightarrow \mathcal{P}$  une immersion ouverte de  $\mathcal{V}$ -schémas formels lisses. Le foncteur canonique  $j^*: M(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \rightarrow M(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{U}}^{(\bullet)}(T \cap U))$  possède un adjoint à gauche exact (le foncteur extension par zéro en dehors de  $U$ ) que l'on notera, afin de ne pas le confondre avec le foncteur image directe extraordinaire,  $j_!^{\text{top}}: M(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{U}}^{(\bullet)}(T \cap U)) \rightarrow M(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . Pour tout  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \in M(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{U}}^{(\bullet)}(T \cap U))$ , on dispose de l'isomorphisme canonique  $j_!^{\text{top}} \lambda^* \chi^*(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \xrightarrow{\sim} \lambda^* \chi^* j_!^{\text{top}}(\mathcal{E}^{(\bullet)})$  qui s'inscrit dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} j_!^{\text{top}}(\mathcal{E}^{(\bullet)}) & \longrightarrow & j_!^{\text{top}} \lambda^* \chi^*(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \\ \parallel & & \downarrow \sim \\ j_!^{\text{top}}(\mathcal{E}^{(\bullet)}) & \longrightarrow & \lambda^* \chi^* j_!^{\text{top}}(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \end{array}$$

dont la flèche horizontale du bas est la flèche canonique tandis que celle du haut est l'image par  $j_!^{\text{top}}$  du morphisme canonique. On dispose des mêmes propriétés concernant  $j^*$ . Soient  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \in M(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{U}}^{(\bullet)}(T \cap U))$ ,  $\mathcal{F}^{(\bullet)} \in M(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ ,  $\lambda \in L$ ,  $\chi \in M$ . On a l'égalité  $\mathcal{E}^{(\bullet)} = j^* j_!^{\text{top}}(\mathcal{E}^{(\bullet)})$  qui est compatible avec les isomorphismes ci-dessus, i.e. l'isomorphisme composé  $j^* j_!^{\text{top}} \lambda^* \chi^*(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \xrightarrow{\sim} j^* \lambda^* \chi^* j_!^{\text{top}}(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \xrightarrow{\sim} \lambda^* \chi^* j^* j_!^{\text{top}}(\mathcal{E}^{(\bullet)})$  est l'identité. De même, le morphisme d'adjonction  $j_!^{\text{top}} j^*(\mathcal{F}^{(\bullet)}) \rightarrow \mathcal{F}^{(\bullet)}$  est compatible aux isomorphismes ci-dessus.

On déduit de ce qui précède que le foncteur  $j_!^{\text{top}}$  envoie les lim-ind-isogénies sur les lim-ind-isogénies. On obtient donc sa factorisation sous la forme  $j_!^{\text{top}}: \underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{U}}^{(\bullet)}(T \cap U)) \rightarrow \underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . Comme le foncteur canonique  $M(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \rightarrow \underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  est exact (e.g. voir [BP09, 2.3.4]), comme une suite exacte courte de  $\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{U}}^{(\bullet)}(T \cap U))$  est isomorphe à l'image par le foncteur canonique quotient d'une suite exacte courte de  $M(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{U}}^{(\bullet)}(T \cap U))$  (e.g. voir

[BP09, 2.3.5]), comme  $j_!^{\text{top}} : M(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{U}}^{(\bullet)}(T \cap U)) \rightarrow M(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  est exact, alors le foncteur  $j_!^{\text{top}} : \underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{U}}^{(\bullet)}(T \cap U)) \rightarrow \underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  est exact. De la même façon, on dispose du foncteur exact  $j^* : \underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \rightarrow \underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{U}}^{(\bullet)}(T \cap U))$ .

On définit l'application  $\alpha : \text{Hom}_{\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{U}}^{(\bullet)}(T \cap U))}(\mathcal{E}^{(\bullet)}, j^* \mathcal{F}^{(\bullet)}) \rightarrow \text{Hom}_{\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))}(j_!^{\text{top}} \mathcal{E}^{(\bullet)}, \mathcal{F}^{(\bullet)})$  de la manière suivante : si  $\phi : \mathcal{E}^{(\bullet)} \rightarrow \lambda^* \chi^* j^* \mathcal{F}^{(\bullet)}$  est un représentant d'une flèche, alors un représentant de  $\alpha(\phi)$  est donné par  $j_!^{\text{top}} \mathcal{E}^{(\bullet)} \xrightarrow{j_!^{\text{top}}(\phi)} j_!^{\text{top}} \lambda^* \chi^* j^* \mathcal{F}^{(\bullet)} \xrightarrow{\sim} \lambda^* \chi^* j_!^{\text{top}} j^* \mathcal{F}^{(\bullet)} \rightarrow \lambda^* \chi^* \mathcal{F}^{(\bullet)}$ . De plus, on définit l'application  $\beta : \text{Hom}_{\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))}(j_!^{\text{top}} \mathcal{E}^{(\bullet)}, \mathcal{F}^{(\bullet)}) \rightarrow \text{Hom}_{\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{U}}^{(\bullet)}(T \cap U))}(\mathcal{E}^{(\bullet)}, j^* \mathcal{F}^{(\bullet)})$  de la manière suivante : si  $\psi : j_!^{\text{top}} \mathcal{E}^{(\bullet)} \rightarrow \lambda^* \chi^* \mathcal{F}^{(\bullet)}$  est un représentant d'une flèche, alors  $\beta(\psi)$  est représenté par  $\mathcal{E}^{(\bullet)} = j^* j_!^{\text{top}}(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \xrightarrow{j^*(\psi)} j^* \lambda^* \chi^* \mathcal{F}^{(\bullet)} \xrightarrow{\sim} \lambda^* \chi^* j^* \mathcal{F}^{(\bullet)}$ . On vérifie facilement que  $\alpha$  et  $\beta$  sont des bijections réciproques. Ainsi, le foncteur exact  $j_!^{\text{top}}$  est un adjoint à gauche de  $j^*$ . On en déduit que si  $\mathcal{F}^{(\bullet)}$  est un objet injectif de la catégorie  $\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ , alors  $j^* \mathcal{F}^{(\bullet)}$  est un objet injectif de la catégorie  $\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{U}}^{(\bullet)}(T \cap U))$ .

**Lemme 1.4.13.** Soient  $\mathcal{E}^{(\bullet)}, \mathcal{J}^{(\bullet)}$  deux objets de  $\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . On suppose de plus que  $\mathcal{J}^{(\bullet)}$  est un objet injectif de la catégorie  $\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . Le faisceau  $\mathcal{H}om_{\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))}(\mathcal{E}^{(\bullet)}, \mathcal{J}^{(\bullet)})$  (voir sa définition en 1.4.1) est flasque.

*Démonstration.* Il s'agit de reprendre les arguments du lemme analogue de [God73, II.7.3.2] qui restent valable grâce au paragraphe 1.4.12.  $\square$

**Lemme 1.4.14.** Soient  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \in K(\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)))$  et  $\mathcal{J}^{(\bullet)} \in K^+(\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)))$  un complexe dont les termes sont des objets injectifs de  $\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . Si  $\mathcal{E}^{(\bullet)}$  ou  $\mathcal{J}^{(\bullet)}$  sont acycliques, alors il en est de même de  $\mathcal{H}om_{\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))}^{\bullet}(\mathcal{E}^{(\bullet)}, \mathcal{J}^{(\bullet)})$ .

*Démonstration.* La preuve du lemme analogue de [Har66, II.3.1] fonctionne encore : il suffit de vérifier que le complexe  $\Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{H}om_{\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))}^{\bullet}(\mathcal{E}^{(\bullet)}, \mathcal{J}^{(\bullet)})) = \text{Hom}_{\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))}^{\bullet}(\mathcal{E}^{(\bullet)}|_{\mathcal{U}}, \mathcal{J}^{(\bullet)}|_{\mathcal{U}})$  est acyclique. Or, d'après 1.4.12,  $\mathcal{J}^{(\bullet)}|_{\mathcal{U}}$  est un complexe dont les termes sont des objets injectifs de  $\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{U}}^{(\bullet)}(T \cap U))$ .  $\square$

## 2 Systèmes inductifs cohérents de $\mathcal{D}$ -modules arithmétiques

### 2.1 Cohérence à ind-isogénie près

Dans cette section, on fixe  $\lambda \in L$ .

*Notations 2.1.1.1.* Soit  $\mathcal{E}^{(\bullet)}$  est un  $\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$ -module.

- On note  $M(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  la catégorie des  $\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$ -modules. Via le morphisme canonique d'anneaux  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T) \rightarrow \lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$ , on dispose du foncteur oubli  $\text{oub}_{\lambda} : M(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \rightarrow M(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ .
- Soit  $\chi \in M$ . On remarque que  $\chi^* \lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$  n'est plus un système inductif d'anneaux (à moins que  $\chi$  soit constante). On calcule que  $\chi^* \mathcal{E}^{(\bullet)}$  reste muni d'une structure canonique de  $\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$ -module. On obtient même le foncteur  $\chi^* : M(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \rightarrow M(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ .
- Soit  $\mu \in L$ . On note  $\mu^* : M(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \rightarrow M(\mu^* \lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ , le foncteur induit par  $\mu^*$ .

*Notations 2.1.2.* • Un morphisme  $f^{(\bullet)} : \mathcal{E}^{(\bullet)} \rightarrow \mathcal{F}^{(\bullet)}$  de  $M(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  est une ind-isogénie s'il existe  $\chi \in M$  et un morphisme  $g^{(\bullet)} : \mathcal{F}^{(\bullet)} \rightarrow \chi^* \mathcal{E}^{(\bullet)}$  de  $M(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  tels que les morphismes  $g^{(\bullet)} \circ f^{(\bullet)}$  et  $\chi^*(f^{(\bullet)}) \circ g^{(\bullet)}$  de  $M(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  sont les morphismes canoniques. La catégorie obtenue en localisant  $M(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  par rapport aux ind-isogénies se note  $\underline{M}_{\mathbb{Q}}(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ .

- Un morphisme  $f^{(\bullet)}: \mathcal{E}^{(\bullet)} \rightarrow \mathcal{F}^{(\bullet)}$  de  $M(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  est une lim-ind-isogénie s'il existe  $\chi \in M$ ,  $\mu \in L$  et un morphisme  $g^{(\bullet)}: \mathcal{F}^{(\bullet)} \rightarrow \mu^* \chi^* \mathcal{E}^{(\bullet)}$  de  $M(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  tels que les morphismes  $g^{(\bullet)} \circ f^{(\bullet)}$  et  $\mu^* \chi^* (f^{(\bullet)}) \circ g^{(\bullet)}$  de  $M(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  sont les morphismes canoniques. On note  $\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  la catégorie localisée par rapport aux lim-ind-isogénies.

**Lemme 2.1.3.** *On bénéficie des factorisations  $\text{oub}_{\lambda}: \underline{M}_{\mathbb{Q}}(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \rightarrow \underline{M}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  et  $\text{oub}_{\lambda}: \underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \rightarrow \underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . De plus, on dispose des factorisations  $\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T) \otimes_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)} -: \underline{M}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \rightarrow \underline{M}_{\mathbb{Q}}(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  et  $\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T) \otimes_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)} -: \underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \rightarrow \underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ .*

*Démonstration.* Il est immédiat qu'une ind-isogénie (resp. une lim-ind-isogénie) de  $M(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  est (via le foncteur oubli) une ind-isogénie (resp. une lim-ind-isogénie) de  $M(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . D'où les factorisations concernant le foncteur oubli. Pour tout  $\chi \in M$ , pour tout  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$ -module  $\mathcal{E}^{(\bullet)}$ , l'isomorphisme canonique  $\chi^*(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T) \otimes_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)} \mathcal{E}^{(\bullet)}) \xrightarrow{\sim} \lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T) \otimes_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)} \chi^* \mathcal{E}^{(\bullet)}$  qui commute aux morphismes canoniques de la forme  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \rightarrow \chi^* \mathcal{E}^{(\bullet)}$ . D'où la première factorisation du foncteur  $\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T) \otimes_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)} -$ . De plus, soit  $f^{(\bullet)}: \mathcal{E}^{(\bullet)} \rightarrow \mathcal{F}^{(\bullet)}$  un morphisme de  $\underline{M}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . Dire que  $f^{(\bullet)}$  est inversible dans  $\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  équivaut à dire qu'il existe un morphisme  $\mu \in L$  et un morphisme  $g^{(\bullet)}: \mathcal{E}^{(\bullet)} \rightarrow \mu^* \mathcal{F}^{(\bullet)}$  de  $\underline{M}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  rendant commutatif le carré de gauche ci-dessous dans le cas où  $\lambda = id$  :

$$\begin{array}{ccccc}
 \lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T) \otimes_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)} \mathcal{F}^{(\bullet)} & \longrightarrow & \lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T) \otimes_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)} \mu^* \mathcal{F}^{(\bullet)} & \longrightarrow & \mu^* \left( \lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T) \otimes_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)} \mathcal{F}^{(\bullet)} \right) \\
 \uparrow id \otimes f^{(\bullet)} & \nearrow id \otimes g^{(\bullet)} & \uparrow id \otimes \mu^* f^{(\bullet)} & & \uparrow \mu^* (id \otimes f^{(\bullet)}) \\
 \lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T) \otimes_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)} \mathcal{E}^{(\bullet)} & \longrightarrow & \lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T) \otimes_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)} \mu^* \mathcal{E}^{(\bullet)} & \longrightarrow & \mu^* \left( \lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T) \otimes_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)} \mathcal{E}^{(\bullet)} \right),
 \end{array} \tag{2.1.3.1}$$

dont les flèches horizontales sont les morphismes canoniques. Il en résulte que la dernière factorisation voulue.  $\square$

**2.1.4 (Adjonction).** On vérifie que le foncteur  $\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T) \otimes_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)} -: M(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \rightarrow M(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  est adjoint à gauche du foncteur oubli  $\text{oub}_{\lambda}: M(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \rightarrow M(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . Comme le foncteur oubli  $\text{oub}_{\lambda}$  commute canoniquement aux foncteurs de la forme  $\mu^*$  et  $\chi^*$ , on vérifie que  $\text{oub}_{\lambda}: \underline{M}_{\mathbb{Q}}(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \rightarrow \underline{M}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  est adjoint à droite de  $\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T) \otimes_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)} -: \underline{M}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \rightarrow \underline{M}_{\mathbb{Q}}(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  et  $\text{oub}_{\lambda}: \underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \rightarrow \underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  est adjoint à droite de  $\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T) \otimes_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)} -: \underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \rightarrow \underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ .

**Lemme 2.1.5.** *Les foncteurs  $\text{oub}_{\lambda}$  et  $\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T) \otimes_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)} -$  sont des équivalences de catégories quasi-inverses entre  $\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  et  $\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . On en déduit en particulier que le foncteur oubli de la forme*

$$\text{oub}_{\lambda}: \underline{M}_{\mathbb{Q}}(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \rightarrow \underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \tag{2.1.5.1}$$

*est pleinement fidèle et exacte (car c'est un quotient par une sous-catégorie de Serre).*

*Démonstration.* Soient  $\mathcal{E}^{(\bullet)}$  un  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$ -module et  $\mathcal{F}^{(\bullet)}$  un  $\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$ -module. Grâce à 2.1.4, il s'agit de vérifier que les morphismes d'adjonction sont des isomorphismes. Cela résulte des diagrammes commutatifs de  $M(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  (resp.

$M(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  pour le carré de droite) :

$$\begin{array}{ccc}
 \lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T) \otimes_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)} \mathcal{E}^{(\bullet)} & \xrightarrow{\quad} & \lambda^*(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T) \otimes_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)} \mathcal{E}^{(\bullet)}) \\
 \uparrow & \nearrow & \uparrow \\
 \mathcal{E}^{(\bullet)} & \xrightarrow{\quad} & \lambda^* \mathcal{E}^{(\bullet)},
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 \mathcal{F}^{(\bullet)} & \xrightarrow{\quad} & \lambda^* \mathcal{F}^{(\bullet)} \\
 \uparrow & \nearrow & \uparrow \\
 \lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T) \otimes_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)} \mathcal{F}^{(\bullet)} & \xrightarrow{\quad} & \lambda^*(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T) \otimes_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)} \mathcal{F}^{(\bullet)}).
 \end{array}
 \quad (2.1.5.2)$$

□

**Définition 2.1.6.** Soit  $\mathcal{E}^{(\bullet)}$  un  $\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$ -module.

- Le module  $\mathcal{E}^{(\bullet)}$  est un  $\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$ -module localement de présentation finie s'il existe un recouvrement ouvert  $(\mathcal{P}_i)_{i \in I}$  de  $\mathcal{P}$  tel que, pour tout  $i \in I$ , on dispose d'une suite exacte dans  $M(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  de la forme :

$$\left( \lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}_i}^{(\bullet)}(T \cap \mathcal{P}_i) \right)^{r_i} \rightarrow \left( \lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}_i}^{(\bullet)}(T \cap \mathcal{P}_i) \right)^{s_i} \rightarrow \mathcal{E}^{(\bullet)}|_{\mathcal{P}_i} \rightarrow 0,$$

où  $r_i, s_i \in \mathbb{N}$ .

- Si de plus, on peut prendre  $\{\mathcal{P}\}$  comme tel recouvrement ouvert de  $\mathcal{P}$ , on dira que le module  $\mathcal{E}^{(\bullet)}$  est un  $\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$ -module globalement de présentation finie.

**Lemme 2.1.7.** Les foncteurs  $\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T) \otimes_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\lambda(0))}(T)} -$  et  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \mapsto \mathcal{E}^{(0)}$  induisent des équivalences quasi-inverses entre la catégorie des  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\lambda(0))}(T)$ -modules cohérents (resp. des  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\lambda(0))}(T)$ -modules globalement de présentation finie) et celle des  $\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$ -modules localement de présentation finie (resp. des  $\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$ -modules globalement de présentation finie).

*Démonstration.* Comme ces deux foncteurs sont exacts à droite, ils se factorisent comme voulu (on vérifie d'abord le cas respectif, le cas non respectif s'en déduisant par cohérence de  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\lambda(0))}(T)$ ). Or, le foncteur  $\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T) \otimes_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\lambda(0))}(T)} -$  est adjoint à gauche de  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \mapsto \mathcal{E}^{(0)}$  pour les catégories de  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\lambda(0))}(T)$ -modules et de  $\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$ -modules. Il suffit donc de vérifier que les morphismes d'adjonction sont des isomorphismes, ce qui est aisé : si  $\mathcal{E}^{(\bullet)}$  un  $\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$ -module localement de présentation finie, alors le morphisme canonique  $\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T) \otimes_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\lambda(0))}(T)} \mathcal{E}^{(0)} \rightarrow \mathcal{E}^{(\bullet)}$  est un isomorphisme car il suffit par exactitude à droite et additivité de nos foncteurs de le vérifier pour  $\mathcal{E}^{(\bullet)} = \lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$  (le fait que le second morphisme d'adjonction soit un isomorphisme est immédiat). □

La caractérisation du lemme qui suit est à rapprocher avec la notion de cohérence de Berthelot que l'on rappellera dans 2.3.1.

**Lemme 2.1.8.** Soit  $\mathcal{E}^{(\bullet)}$  un  $\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$ -module. Le  $\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$ -module  $\mathcal{E}^{(\bullet)}$  est localement de présentation finie si et seulement s'il satisfait les conditions suivantes :

1. Pour tout  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{E}^{(m)}$  est un  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\lambda(m))}(T)$ -module cohérent ;
2. Pour tous entiers  $0 \leq m \leq m'$ , le morphisme canonique

$$\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\lambda(m'))}(T) \otimes_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\lambda(m))}(T)} \mathcal{E}^{(m)} \rightarrow \mathcal{E}^{(m')} \quad (2.1.8.1)$$

est un isomorphisme.

*Démonstration.* Cela découle aussitôt de 2.1.7. □



**Remarques 2.1.9.** • Comme les extensions  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\lambda(m))}(T) \rightarrow \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\lambda(m+1))}(T)$  ne sont pas plates, la catégorie des  $\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$ -modules localement de présentation finie n'est pas stable par noyau.

- Si  $\mathcal{P}$  est affine, d'après le théorème de type A, les notions de  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\lambda(0))}(T)$ -modules cohérents et de  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\lambda(0))}(T)$ -modules globalement de présentation finie sont alors égales. D'après 2.1.7, il en résulte que les notions de  $\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$ -modules localement de présentation finie et de  $\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$ -modules globalement de présentation finie sont alors égales. De plus, le foncteur  $\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T) \otimes_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\lambda(0))}(T)} -$  de la catégorie des  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\lambda(0))}(T)$ -modules de type fini dans celle des  $\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$ -modules localement de présentation finie est une équivalence de catégories dont un foncteur quasi-inverse est donné par  $\mathcal{G}^{(\bullet)} \mapsto \Gamma(\mathcal{P}, \mathcal{G}^{(0)})$ .

**Lemme 2.1.10.** Soit  $f^{(\bullet)}: \mathcal{E}^{(\bullet)} \rightarrow \mathcal{F}^{(\bullet)}$  un morphisme de  $M(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . On suppose que, pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , les  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\lambda(m))}(T)$ -modules  $\mathcal{E}^{(m)}$  et  $\mathcal{F}^{(m)}$  sont cohérents. Le morphisme  $f^{(\bullet)}$  est alors une ind-isogénie de  $M(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  si et seulement si le morphisme  $f_{\mathbb{Q}}^{(\bullet)}: \mathcal{E}_{\mathbb{Q}}^{(\bullet)} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathbb{Q}}^{(\bullet)}$  induit après tensorisation par  $\mathbb{Q}$  est un isomorphisme de  $\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)_{\mathbb{Q}}$ -modules.

*Démonstration.* 0) Comme les morphismes canoniques de la forme  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \rightarrow \chi^* \mathcal{E}^{(\bullet)}$  avec  $\chi \in M$  deviennent des isomorphismes après application du foncteur  $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} -$ , la première implication est évidente. Réciproquement supposons que  $f_{\mathbb{Q}}^{(\bullet)}$  soit un isomorphisme.

1) D'après [Ber96b, 3.4.4], si on note  $\mathcal{E}_t^{(m)}$  le sous-faisceau des sections de  $p$ -torsion de  $\mathcal{E}^{(m)}$ , alors  $\mathcal{E}_t^{(m)}$  est un sous- $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\lambda(m))}(T)$ -module cohérent de  $\mathcal{E}^{(m)}$ . Notons  $\alpha: \mathcal{E}^{(\bullet)} \rightarrow \mathcal{E}^{(\bullet)}/\mathcal{E}_t^{(\bullet)}$ , la projection canonique. Vérifions que c'est une ind-isogénie de  $M(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . Comme  $\mathcal{E}_t^{(m)}$  est un  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\lambda(m))}(T)$ -module cohérent, il existe alors  $\chi \in M$  tel que la multiplication  $p\chi^{(m)}: \mathcal{E}^{(m)} \rightarrow \mathcal{E}^{(m)}$  se factorise (de manière unique) en  $\beta^{(m)}: \mathcal{E}^{(m)}/\mathcal{E}_t^{(m)} \rightarrow \mathcal{E}^{(m)}$ . On en déduit que le morphisme  $\beta^{(\bullet)}: \mathcal{E}^{(\bullet)}/\mathcal{E}_t^{(\bullet)} \rightarrow \chi^* \mathcal{E}^{(\bullet)}$  de  $M(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  est tel que  $\beta^{(\bullet)} \circ \alpha^{(\bullet)}$  et  $\chi^* \alpha^{(\bullet)} \circ \beta^{(\bullet)}$  sont les morphismes canoniques.

2) D'après l'étape 1) quitte à quotienter par les sous-modules de  $p$ -torsion, on peut supposer que, pour tout  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{E}^{(m)}$  et  $\mathcal{F}^{(m)}$  sont sans  $p$ -torsion. Il existe alors  $\chi \in M$  tel que pour tout  $m \in M$ , l'isomorphisme canonique  $h^{(m)} := p\chi^{(m)}(f_{\mathbb{Q}}^{(m)})^{-1}: \mathcal{F}_{\mathbb{Q}}^{(m)} \rightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{Q}}^{(m)}$  se factorise (de manière unique) par un morphisme de la forme  $b^{(m)}: \mathcal{F}^{(m)} \rightarrow \mathcal{E}^{(m)}$ . Comme  $\chi^* \mathcal{E}^{(\bullet)} \subset \chi^* \mathcal{E}_{\mathbb{Q}}^{(\bullet)}$  et  $\chi^* \mathcal{F}^{(\bullet)} \subset \chi^* \mathcal{F}_{\mathbb{Q}}^{(\bullet)}$ , on calcule en fait que le morphisme  $h_{\mathbb{Q}}^{(\bullet)}: \mathcal{F}_{\mathbb{Q}}^{(\bullet)} \rightarrow \chi^* \mathcal{E}_{\mathbb{Q}}^{(\bullet)}$  se factorise en le morphisme  $b^{(\bullet)}: \mathcal{F}^{(\bullet)} \rightarrow \chi^* \mathcal{E}^{(\bullet)}$  (i.e., les  $b^{(m)}$  commutent aux morphismes de transition) qui est tel que  $g^{(\bullet)} \circ f^{(\bullet)}$  et  $\chi^*(f^{(\bullet)}) \circ g^{(\bullet)}$  sont les morphismes canoniques. □

**Définition 2.1.11.** Soit  $\mathcal{E}^{(\bullet)}$  un  $\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$ -module. Le module  $\mathcal{E}^{(\bullet)}$  est un  $\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$ -module de type fini à ind-isogénie près s'il existe un recouvrement ouvert  $(\mathcal{P}_i)_{i \in I}$  de  $\mathcal{P}$  tel que, pour tout  $i \in I$ , on dispose d'une suite exacte dans  $\underline{M}_{\mathbb{Q}}(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  de la forme :  $\left( \lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}_i}^{(\bullet)}(T \cap \mathcal{P}_i) \right)_{r_i}^{r_i} \rightarrow \mathcal{E}^{(\bullet)}|_{\mathcal{P}_i} \rightarrow 0$ , où  $r_i \in \mathbb{N}$ . De même, on définit la notion de  $\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$ -module localement (resp. globalement) de présentation finie à ind-isogénie près ou de  $\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$ -module cohérent à ind-isogénie près.

**Lemme 2.1.12.** Soit  $\mathcal{E}^{(\bullet)}$  un  $\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$ -module. Le  $\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$ -module  $\mathcal{E}^{(\bullet)}$  est globalement de présentation finie à ind-isogénie près si et seulement s'il est isomorphe dans  $\underline{M}_{\mathbb{Q}}(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  à un  $\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$ -module globalement de présentation finie.

*Démonstration.* La suffisance est triviale. Réciproquement, supposons que  $\mathcal{E}^{(\bullet)}$  soit le conoyau dans  $\underline{M}_{\mathbb{Q}}(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  d'une flèche de la forme  $\left( \lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T) \right)^r \rightarrow \left( \lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T) \right)^s$ . Soit  $\phi^{(\bullet)}: \left( \lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T) \right)^r \rightarrow \chi^* \left( \lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T) \right)^s$  un représentant de ce morphisme pour un certain  $\chi \in M$ . Comme  $\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T) \otimes_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\lambda(0))}(T)} \text{coker } \phi^{(0)}$  est un  $\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$ -module localement de présentation finie, grâce au lemme 2.1.10, le morphisme canonique  $\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T) \otimes_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\lambda(0))}(T)} \text{coker } \phi^{(0)} \rightarrow \text{coker } \phi^{(\bullet)}$  est une ind-isogénie de  $M(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . D'où le résultat. □

**Lemme 2.1.13.** *Les notions de  $\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$ -module localement de présentation finie à ind-isogénie près et de  $\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$ -module cohérent à ind-isogénie près sont équivalentes. En particulier, le faisceau d'anneaux  $\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$  est alors un  $\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$ -module cohérent à ind-isogénie près.*

*Démonstration.* La cohérence à ind-isogénie près entraîne clairement la locale présentation finie à ind-isogénie près. Réciproquement, soit  $\mathcal{E}^{(\bullet)}$  un  $\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$ -module localement de présentation finie à ind-isogénie près. Comme le lemme est locale et comme les propriétés équivalentes à établir sont stables par isomorphisme dans  $\underline{M}_{\mathbb{Q}}(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ , via les lemmes 2.1.7 et 2.1.12, on peut supposer qu'il existe un  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\lambda(0))}(T)$ -module globalement de présentation finie  $\mathcal{F}^{(0)}$  tel que  $\mathcal{E}^{(\bullet)} = \lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T) \otimes_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\lambda(0))}(T)} \mathcal{F}^{(0)}$ . Soit  $f^{(\bullet)}: \left(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)\right)^r \rightarrow \mathcal{E}^{(\bullet)}$  de  $\underline{M}_{\mathbb{Q}}(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . Il s'agit de vérifier que  $\ker f^{(\bullet)}$  est de type fini à ind-isogénie près. Soient  $\chi \in M$ ,  $a^{(\bullet)}: \left(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)\right)^r \rightarrow \chi^* \mathcal{E}^{(\bullet)}$  un morphisme de  $M(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  qui soit un représentant de  $f^{(\bullet)}$ . Comme  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\lambda(m))}(T)$  est un anneau cohérent, comme les extensions  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\lambda(m))}(T)_{\mathbb{Q}} \rightarrow \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\lambda(m+1))}(T)_{\mathbb{Q}}$  sont plates, il découle alors du lemme 2.1.10 que le morphisme canonique  $\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T) \otimes_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\lambda(0))}(T)} \ker a^{(0)} \rightarrow \ker a^{(\bullet)}$  est une ind-isogénie de  $M(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . D'où le résultat.  $\square$

*Remarques 2.1.14.* Avec les notations du lemme 2.1.13, comme les extensions  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\lambda(m))}(T) \rightarrow \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\lambda(m+1))}(T)$  ne sont pas plates, il semble faux que le faisceau d'anneaux  $\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$  soit cohérent (comme objet de  $M(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ ).

*Notations 2.1.15.* Notons  $\underline{M}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  la sous-catégorie pleine de  $\underline{M}_{\mathbb{Q}}(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  des  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$ -modules cohérents à ind-isogénie près. De même, lorsque  $\mathcal{P}$  est affine, en reprenant tout ce qui précède dans ce contexte, on définit de manière identique la sous-catégorie pleine  $\underline{M}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  de  $\underline{M}_{\mathbb{Q}}(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  des  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$ -modules cohérents à ind-isogénie près.

**Lemme 2.1.16.** *Si  $\mathcal{P}^{(\bullet)}$  est un objet projectif de  $M(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ , alors  $\mathcal{P}^{(\bullet)}$  est un objet projectif de  $\underline{M}_{\mathbb{Q}}(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ .*

*Démonstration.* Soit  $g^{(\bullet)}: \mathcal{E}^{(\bullet)} \rightarrow \mathcal{F}^{(\bullet)}$  un épimorphisme de  $\underline{M}_{\mathbb{Q}}(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  et  $f^{(\bullet)}: \mathcal{P}^{(\bullet)} \rightarrow \mathcal{F}^{(\bullet)}$  un morphisme de  $\underline{M}_{\mathbb{Q}}(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . Soient  $\chi \in M$ ,  $\phi^{(\bullet)}: \mathcal{P}^{(\bullet)} \rightarrow \chi^* \mathcal{F}^{(\bullet)}$  et  $\psi^{(\bullet)}: \mathcal{E}^{(\bullet)} \rightarrow \chi^* \mathcal{F}^{(\bullet)}$  des morphismes de  $M(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  représentant respectivement  $f^{(\bullet)}$  et  $g^{(\bullet)}$ . Notons  $\mathcal{G}^{(\bullet)} := \chi^* \mathcal{F}^{(\bullet)}$ ,  $\mathcal{H}^{(\bullet)} := \text{im } \psi^{(\bullet)}$  et  $\alpha^{(\bullet)}: \mathcal{H}^{(\bullet)} \rightarrow \mathcal{G}^{(\bullet)}$  l'inclusion canonique. Comme  $g^{(\bullet)}$  est un épimorphisme, il existe  $\chi_1 \in M$  et un morphisme  $\beta^{(\bullet)}: \mathcal{G}^{(\bullet)} \rightarrow \chi_1^* \mathcal{H}^{(\bullet)}$  tels que  $\beta^{(\bullet)} \circ \alpha^{(\bullet)}$  et  $\chi_1^* (\alpha^{(\bullet)} \circ \beta^{(\bullet)})$  sont les morphismes canoniques. Comme  $\mathcal{P}^{(\bullet)}$  est projectif, il existe un unique morphisme  $\theta^{(\bullet)}: \mathcal{P}^{(\bullet)} \rightarrow \chi_1^* \mathcal{E}^{(\bullet)}$  dont le composé avec la surjection  $\chi_1^* \mathcal{E}^{(\bullet)} \rightarrow \chi_1^* \mathcal{H}^{(\bullet)}$  induite par  $\chi_1^* \psi^{(\bullet)}$  donne  $\beta^{(\bullet)} \circ \phi^{(\bullet)}$ . On remarque de plus que  $\chi_1^* (\psi^{(\bullet)} \circ \theta^{(\bullet)})$  est égal au composé de  $\phi^{(\bullet)}$  avec le morphisme canonique  $\mathcal{G}^{(\bullet)} \rightarrow \chi_1^* \mathcal{G}^{(\bullet)}$ . Si on note  $h^{(\bullet)}: \mathcal{P}^{(\bullet)} \rightarrow \mathcal{E}^{(\bullet)}$  le morphisme de  $\underline{M}_{\mathbb{Q}}(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  dont  $\theta^{(\bullet)}$  est un représentant, on a donc  $g^{(\bullet)} \circ h^{(\bullet)} = f^{(\bullet)}$ .  $\square$

*Remarques 2.1.17.* Je ne sais pas s'il est vrai que si  $\mathcal{J}^{(\bullet)}$  est un objet injectif de  $M(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ , alors  $\mathcal{J}^{(\bullet)}$  est un objet injectif de  $\underline{M}_{\mathbb{Q}}(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ .

**Proposition 2.1.18.** *La sous-catégorie pleine  $\underline{M}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  de  $\underline{M}_{\mathbb{Q}}(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  est stable par isomorphisme, noyau, conoyau, extension.*

*Démonstration.* La stabilité par isomorphisme est triviale. Vérifions à présent la stabilité par noyau et conoyau. Soit  $f^{(\bullet)}: \mathcal{E}^{(\bullet)} \rightarrow \mathcal{F}^{(\bullet)}$  un morphisme de  $\underline{M}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . La cohérence à ind-isogénie étant une propriété locale et stable par isomorphisme de  $\underline{M}_{\mathbb{Q}}(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ , grâce à 2.1.12, on peut supposer que  $\mathcal{E}^{(\bullet)}$  et  $\mathcal{F}^{(\bullet)}$  sont des  $\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$ -modules globalement de présentation finie. Soient  $\chi \in M$  et  $\phi^{(\bullet)}: \mathcal{E}^{(\bullet)} \rightarrow \chi^* \mathcal{F}^{(\bullet)}$  un morphisme de  $M(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  qui représente  $f^{(\bullet)}$ . Via le lemme 2.1.10, on vérifie alors que les morphismes canoniques  $\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T) \otimes_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\lambda(0))}(T)} \ker \phi^{(0)} \rightarrow \ker \phi^{(\bullet)}$  et  $\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T) \otimes_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\lambda(0))}(T)} \text{coker} \phi^{(0)} \rightarrow \text{coker} \phi^{(\bullet)}$  sont des ind-isogénies de  $M(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ .

Traisons maintenant la stabilité par extension. Soit  $0 \rightarrow \mathcal{E}^{(\bullet)} \xrightarrow{f^{(\bullet)}} \mathcal{F}^{(\bullet)} \xrightarrow{g^{(\bullet)}} \mathcal{G}^{(\bullet)} \rightarrow 0$  une suite exacte dans la catégorie  $\underline{M}_{\mathbb{Q}}(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  avec  $\mathcal{E}^{(\bullet)}, \mathcal{G}^{(\bullet)} \in \underline{M}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . Comme la cohérence de  $\mathcal{F}^{(\bullet)}$  est locale, on peut supposer qu'il existe des épimorphismes de la forme  $a^{(\bullet)}: (\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))^r \rightarrow \mathcal{E}^{(\bullet)}$  et  $b^{(\bullet)}: (\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))^s \rightarrow \mathcal{G}^{(\bullet)}$ . D'après 2.1.16, il existe  $h^{(\bullet)}: (\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))^s \rightarrow \mathcal{F}^{(\bullet)}$  tel que  $g^{(\bullet)} \circ h^{(\bullet)} = b^{(\bullet)}$ . On en déduit que  $(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))^r \oplus (\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))^s \rightarrow \mathcal{F}^{(\bullet)}$  défini par  $f^{(\bullet)} \circ a^{(\bullet)} + h^{(\bullet)}$  est un épimorphisme. On a donc validé que  $\mathcal{F}^{(\bullet)}$  est de type fini à ind-isogénie près. Soit  $\alpha^{(\bullet)}: (\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))^t \rightarrow \mathcal{F}^{(\bullet)}$  un morphisme de  $\underline{M}_{\mathbb{Q}}(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . Il reste à vérifier que  $\ker \alpha^{(\bullet)}$  est de type fini à ind-isogénie près. Comme  $\mathcal{G}^{(\bullet)}$  est cohérent à ind-isogénie près,  $\ker(g^{(\bullet)} \circ \alpha^{(\bullet)})$  est de type fini à ind-isogénie près. Comme ce que l'on doit prouver est local, on peut supposer qu'il existe un épimorphisme de  $\underline{M}_{\mathbb{Q}}(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  de la forme  $\beta^{(\bullet)}: (\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))^u \rightarrow \ker(g^{(\bullet)} \circ \alpha^{(\bullet)})$ . Comme  $\underline{M}_{\mathbb{Q}}(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  est une catégorie abélienne, on dispose de l'isomorphisme canonique  $\alpha^{(\bullet)}(\ker(g^{(\bullet)} \circ \alpha^{(\bullet)})) \xrightarrow{\sim} \text{im}(\alpha^{(\bullet)}) \cap \ker g^{(\bullet)}$ . En particulier, si on note  $\delta^{(\bullet)}: \ker(g^{(\bullet)} \circ \alpha^{(\bullet)}) \rightarrow \mathcal{F}^{(\bullet)}$  le composé de  $\alpha^{(\bullet)}$  avec le monomorphisme  $\ker(g^{(\bullet)} \circ \alpha^{(\bullet)}) \subset (\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))^t$ , on obtient la factorisation canonique  $\varepsilon^{(\bullet)}: \ker(g^{(\bullet)} \circ \alpha^{(\bullet)}) \rightarrow \mathcal{E}^{(\bullet)}$  de  $\delta^{(\bullet)}$  par  $f^{(\bullet)}$ . Comme  $\mathcal{E}^{(\bullet)}$  est cohérent à ind-isogénie près,  $\ker \varepsilon^{(\bullet)} \circ \beta^{(\bullet)}$  est de type fini à ind-isogénie près. Comme  $f^{(\bullet)}$  est un monomorphisme, il en résulte que  $\ker(f^{(\bullet)} \circ \varepsilon^{(\bullet)} \circ \beta^{(\bullet)})$  est de type fini à ind-isogénie près. Comme  $f^{(\bullet)} \circ \varepsilon^{(\bullet)} \circ \beta^{(\bullet)} = \delta^{(\bullet)} \circ \beta^{(\bullet)}$ , alors  $\ker(\delta^{(\bullet)} \circ \beta^{(\bullet)})$  est de type fini à ind-isogénie près. Or, on dispose des isomorphismes  $\beta^{(\bullet)}(\ker(\delta^{(\bullet)} \circ \beta^{(\bullet)})) \xrightarrow{\sim} \text{im}(\beta^{(\bullet)}) \cap \ker(\delta^{(\bullet)}) \xrightarrow{\sim} \ker(\alpha^{(\bullet)})$ , qui est donc de type fini à ind-isogénie près.  $\square$

**Lemme 2.1.19.** Soit  $\mathcal{E}^{(\bullet)}$  un  $\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$ -module. Le module  $\mathcal{E}^{(\bullet)}$  est isomorphe dans  $\underline{M}_{\mathbb{Q}}(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  à un  $\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$ -module localement de présentation finie si et seulement si  $\mathcal{E}^{(0)}$  est isogène à un  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\lambda(0))}(T)$ -module cohérent et le morphisme canonique  $\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T) \otimes_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\lambda(0))}(T)} \mathcal{E}^{(0)} \rightarrow \mathcal{E}^{(\bullet)}$  est une ind-isogénie de  $M(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ .

De plus, deux  $\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$ -modules localement de présentation finie sont isomorphes dans  $\underline{M}_{\mathbb{Q}}(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  si et seulement s'ils sont ind-isogènes dans  $M(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ .

*Démonstration.* Supposons qu'il existe  $\mathcal{F}^{(0)}$  un  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\lambda(0))}(T)$ -module cohérent,  $f^{(0)}: \mathcal{E}^{(0)} \rightarrow \mathcal{F}^{(0)}$  et  $g^{(0)}: \mathcal{F}^{(0)} \rightarrow \mathcal{E}^{(0)}$  deux morphismes  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\lambda(0))}(T)$ -linéaires tels que  $f^{(0)} \circ g^{(0)}$  et  $g^{(0)} \circ f^{(0)}$  sont les multiplications par  $p^n$ . En prenant  $\chi \in \mathbb{N}$  la fonction constante égale à  $n$ , on obtient par extension les morphismes  $f^{(\bullet)}: \lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T) \otimes_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\lambda(0))}(T)} \mathcal{E}^{(0)} \rightarrow \lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T) \otimes_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\lambda(0))}(T)} \mathcal{F}^{(0)}$  et  $g^{(\bullet)}: \lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T) \otimes_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\lambda(0))}(T)} \mathcal{E}^{(0)} \rightarrow \lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T) \otimes_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\lambda(0))}(T)} \mathcal{F}^{(0)}$ . Alors  $f^{(\bullet)} \circ g^{(\bullet)}$  et  $g^{(\bullet)} \circ f^{(\bullet)}$  sont les morphismes canoniques (i.e. les multiplications par  $p^n$  à chaque niveau). D'où la suffisance de la première assertion à valider. Réciproquement, supposons que  $\mathcal{E}^{(\bullet)}$  est isomorphe dans  $\underline{M}_{\mathbb{Q}}(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  à un  $\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$ -module  $\mathcal{F}^{(\bullet)}$  localement de présentation finie. Dans ce cas, il existe  $\chi \in \mathbb{N}$  et une ind-isogénie de  $M(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  de la forme  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \rightarrow \chi^* \mathcal{F}^{(\bullet)}$ . On en déduit que  $\mathcal{E}^{(0)}$  et  $\mathcal{F}^{(0)}$  sont isogènes. On en déduit les ind-isogénies de  $M(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  de la forme  $\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T) \otimes_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\lambda(0))}(T)} \mathcal{E}^{(0)} \rightarrow \mathcal{F}^{(0)} \rightarrow \chi^* \mathcal{F}^{(\bullet)}$ . Comme ce composé est égal au composé  $\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T) \otimes_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\lambda(0))}(T)} \mathcal{E}^{(0)} \rightarrow \mathcal{E}^{(\bullet)} \rightarrow \chi^* \mathcal{F}^{(\bullet)}$ , on en déduit la première assertion. La seconde assertion se traite de manière analogue.  $\square$

## 2.2 Cohérence à lim-ind-isogénie près

**Définition 2.2.1.** Soit  $\mathcal{E}^{(\bullet)}$  un  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$ -module. Le module  $\mathcal{E}^{(\bullet)}$  est un  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$ -module de type fini à lim-ind-isogénie près s'il existe un recouvrement ouvert  $(\mathcal{P}_i)_{i \in I}$  de  $\mathcal{P}$  tel que, pour tout  $i \in I$ , on dispose d'une suite exacte dans  $\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  de la forme :  $(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}_i}^{(\bullet)}(T \cap \mathcal{P}_i))_{r_i} \rightarrow \mathcal{E}^{(\bullet)}|_{\mathcal{P}_i} \rightarrow 0$ , où  $r_i \in \mathbb{N}$ . De même, on définit la notion de  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$ -

module de localement de présentation finie à lim-ind-isogénie près (resp. globalement de présentation finie à lim-ind-isogénie près, resp. cohérent à lim-ind-isogénie près).

Le lemme qui suit sera amélioré via 2.4.5 (mais ce dernier utilise 2.2.2 qui est une première étape).

**Lemme 2.2.2.** *Soit  $\mathcal{E}^{(\bullet)}$  un  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$ -module. Le  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$ -module  $\mathcal{E}^{(\bullet)}$  est globalement de présentation finie à lim-ind-isogénie près si et seulement si il existe  $\lambda \in L$  et un  $\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$ -module  $\mathcal{F}^{(\bullet)}$  globalement de présentation finie tel que  $\mathcal{E}^{(\bullet)}$  et  $\mathcal{F}^{(\bullet)}$  soit isomorphe dans  $\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ .*

*Démonstration.* La suffisance est triviale. Réciproquement, supposons que  $\mathcal{E}^{(\bullet)}$  soit le conoyau dans  $\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  d'une flèche de la forme  $\left(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)\right)^r \rightarrow \left(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)\right)^s$ . Soient  $\chi \in M$ ,  $\lambda \in L$  et  $\phi^{(\bullet)}: \left(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)\right)^r \rightarrow \chi^* \left(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)\right)^s$  un représentant de ce morphisme. Comme  $\chi^* \left(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)\right)^s$  est muni d'une structure canonique de  $\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$ -module qui prolonge celle de  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$ -module, on en déduit par adjonction (voir 2.1.4) que le morphisme  $\phi^{(\bullet)}$  se factorise de manière unique en un morphisme de  $M(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  de la forme  $\psi^{(\bullet)}: \left(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)\right)^r \rightarrow \chi^* \left(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)\right)^s$ . Comme  $\text{coker } \psi^{(\bullet)}$  (calculé dans  $\underline{M}_{\mathbb{Q}}(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ ) est un  $\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$ -module globalement de présentation finie à ind-isogénie près, d'après le lemme 2.1.12, le module  $\text{coker } \psi^{(\bullet)}$  est isomorphe dans  $\underline{M}_{\mathbb{Q}}(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  (et donc dans  $\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ ) via le foncteur oubli de 2.1.5.1) à un  $\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$ -module globalement de présentation finie. Comme  $\text{coker } \psi^{(\bullet)}$  est isomorphe à  $\mathcal{E}^{(\bullet)}$  dans  $\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ , on a donc terminé la preuve.  $\square$

**Lemme 2.2.3.** *Les notions de  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$ -module localement de présentation finie à lim-ind-isogénie près et de  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$ -module cohérent à lim-ind-isogénie près sont équivalentes. En particulier, le faisceau d'anneaux  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$  est alors un  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$ -module cohérent à lim-ind-isogénie près.*

*Démonstration.* La cohérence à lim-ind-isogénie près entraîne clairement la locale présentation finie à lim-ind-isogénie près. Réciproquement, soit  $\mathcal{E}^{(\bullet)}$  un  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$ -module localement de présentation finie à lim-ind-isogénie. Comme la cohérence à lim-ind-isogénie est locale, on peut supposer que  $\mathcal{E}^{(\bullet)}$  un  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$ -module globalement de présentation finie à lim-ind-isogénie. D'après 2.2.2, par stabilité par isomorphismes de  $\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  de la propriété de cohérence à lim-ind-isogénie, on se ramène au cas où  $\mathcal{E}^{(\bullet)}$  est un  $\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$ -module globalement de présentation finie. Soit  $f^{(\bullet)}: \left(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)\right)^r \rightarrow \mathcal{E}^{(\bullet)}$  un morphisme de  $\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . Il s'agit de vérifier que  $\ker f^{(\bullet)}$  est de type fini à lim-ind-isogénie près. Soient  $\chi \in M$ ,  $\lambda \in L$ ,  $a^{(\bullet)}: \left(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)\right)^r \rightarrow \chi^* \lambda^* \mathcal{E}^{(\bullet)}$  un morphisme de  $M(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  qui soit un représentant de  $f^{(\bullet)}$ . Par adjonction (voir 2.1.4), le morphisme  $a^{(\bullet)}$  se factorise de manière unique en un morphisme  $b^{(\bullet)}: \left(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)\right)^r \rightarrow \chi^* \lambda^* \mathcal{E}^{(\bullet)}$  de  $M(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . Il résulte des propositions 2.1.13 et 2.1.18 que  $\ker b^{(\bullet)}$  est un  $\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$ -module de type fini à ind-isogénie près, et par conséquent un  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$ -module de type fini à lim-ind-isogénie près (en effet, on dispose du foncteur oubli de 2.1.5.1). Comme  $\ker b^{(\bullet)}$  et  $\ker f^{(\bullet)}$  sont isomorphes dans  $\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ , on conclut alors la preuve.  $\square$

*Notations 2.2.4.* On note  $\underline{LM}_{\mathbb{Q},\text{coh}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  la sous-catégorie pleine de  $\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  des  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$ -modules cohérents à lim-ind-isogénie près. De même, lorsque  $\mathcal{P}$  est affine, on définit la sous-catégorie pleine  $\underline{LM}_{\mathbb{Q},\text{coh}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  de  $\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  des  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$ -modules cohérents à lim-ind-isogénie près (en remplaçant partout «  $\mathcal{D}$  » par «  $D$  »).

*Remarques 2.2.5.* Soit  $\lambda \in L$ . De manière analogue, quitte à remplacer «  $\tilde{\mathcal{D}}$  » par «  $\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}$  », on peut définir la sous-catégorie pleine  $\underline{LM}_{\mathbb{Q},\text{coh}}(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  de  $\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  des  $\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$ -modules cohérents à lim-ind-isogénie près. Avec le lemme 2.1.5 et avec la caractérisation de la globale présentation finie donnée dans 2.2.2, les foncteurs

oub $_{\lambda}$  et  $\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T) \otimes_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)} -$  induisent des équivalences de catégories quasi-inverses entre  $\underline{LM}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  et  $\underline{LM}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ .

**Proposition 2.2.6.** *Les foncteurs oubli et  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T) \otimes_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)} -$  sont des équivalences de catégories quasi-inverses entre  $\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  (resp.  $\underline{LM}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}(\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ ) et  $\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  (resp.  $\underline{LM}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ ).*

*Démonstration.* On vérifie de manière analogue à 2.1.5 le cas non respectif. De même, on établit que les foncteurs oubli et  $\lambda_0^* \hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T) \otimes_{\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)} -$  induisent des équivalences quasi-inverses entre  $\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  et  $\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\lambda_0^* \hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ .

Traisons à présent le cas respectif. Les factorisations  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T) \otimes_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)} - : \underline{LM}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}(\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \rightarrow \underline{LM}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  et  $\lambda_0^* \hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T) \otimes_{\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)} - : \underline{LM}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \rightarrow \underline{LM}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}(\lambda_0^* \hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  sont aisées. Or, d'après 2.2.5, le foncteur oubli se factorise par  $\underline{LM}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}(\lambda_0^* \hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \rightarrow \underline{LM}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}(\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . D'où le résultat.  $\square$

**Lemme 2.2.7.** *Si  $\mathcal{P}^{(\bullet)}$  est un objet projectif de  $\underline{M}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ , alors  $\mathcal{P}^{(\bullet)}$  est un objet projectif de  $\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ .*

*Démonstration.* La preuve est identique à celle de 2.1.16 (on remplace les  $\chi$  par des  $\lambda$ ).  $\square$

**Proposition 2.2.8.** *La sous catégorie pleine  $\underline{LM}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  de  $\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  est stable par isomorphisme, noyau, conoyau, extension.*

*Démonstration.* Il s'agit de reprendre la preuve de 2.1.18 (on utilise 2.2.2, 2.2.7 et le fait que la catégorie  $\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  est abélienne).  $\square$

## 2.3 Cohérence au sens de Berthelot

Rappelons d'abord la notion de cohérence au sens de Berthelot (voir [Ber02, 4.2.2]) :

**Définition 2.3.1.** Soit  $\sharp \in \{\emptyset, +, -, b\}$ . Soit  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}}^{\sharp}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . Le complexe  $\mathcal{E}^{(\bullet)}$  est cohérent si et seulement s'il existe  $\lambda \in L$  et  $\mathcal{F}^{(\bullet)} \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}}^{\sharp}(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  et un isomorphisme de  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}^{(\bullet)}$  dans  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}}^{\sharp}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ , tels que  $\mathcal{F}^{(\bullet)}$  vérifie les conditions suivantes :

1. Pour tout  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{E}^{(m)} \in D_{\text{coh}}^{\sharp}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\lambda(m))}(T))$  ;
2. Pour tous entiers  $0 \leq m \leq m'$ , le morphisme canonique

$$\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\lambda(m'))}(T) \otimes_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\lambda(m))}(T)}^{\mathbb{L}} \mathcal{F}^{(m)} \rightarrow \mathcal{F}^{(m')} \quad (2.3.1.1)$$

est un isomorphisme.

*Notations 2.3.2.* Soit  $\sharp \in \{\emptyset, +, -, b\}$ . On note  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^{\sharp}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  la sous-catégorie strictement pleine de  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}}^{\sharp}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  des complexes cohérents. On note  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^0(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  la sous-catégorie strictement pleine de  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}}^0(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  des complexes  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ .

**2.3.3.** Berthelot a de plus vérifié que, pour tout  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^{-}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  et pour tout  $\mathcal{F}^{(\bullet)} \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}}^{+}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ , l'application

$$\varinjlim : \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\underline{LD}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))}(\mathcal{E}^{(\bullet)}, \mathcal{F}^{(\bullet)}) \rightarrow \mathbb{R}\mathcal{H}om_{D(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{(\dagger T)}\mathbb{Q})}(\varinjlim \mathcal{E}^{(\bullet)}, \varinjlim \mathcal{F}^{(\bullet)}) \quad (2.3.3.1)$$

est un isomorphisme.

**Proposition 2.3.4.** *Les foncteurs oubli et  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T) \otimes_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)}^{\mathbb{L}} -$  induisent des équivalences de catégories quasi-inverses entre  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}}^b(\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  (resp.  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b(\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ ) et  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  (resp.  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ ).*

*Démonstration.* On procède de manière identique à 2.2.6.  $\square$

## 2.4 Sur une équivalence de catégories des complexes à cohomologie cohérente

*Notations 2.4.1.* Pour  $\sharp \in \{0, +, -, b, \emptyset\}$ , on notera  $D_{\text{coh}}^{\sharp}(\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)))$  la sous-catégorie pleine de  $D^{\sharp}(\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)))$  des complexes  $\mathcal{E}^{(\bullet)}$  tels que, pour  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $\mathcal{H}^n(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \in \underline{LM}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  (voir les notations de 2.2.4). On remarquera que cette notion de cohérence est locale en  $\mathcal{P}$ .

Le lemme qui suit peut se voir comme un cas particulier de 2.3.3.1. Par soucis d'exhaustivité pour le lecteur, nous donnons une vérification.

**Lemme 2.4.2.** *Soit  $\mathcal{F}^{(\bullet)} \in \underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . Le morphisme de faisceaux en groupes abéliens de 1.4.10.1*

$$\mathcal{H}om_{\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T), \mathcal{F}^{(\bullet)}) \rightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}}(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}, \varinjlim \mathcal{F}^{(\bullet)}) \quad (2.4.2.1)$$

*est un isomorphisme.*

*Démonstration.* Pour tout ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathcal{P}$ , on dispose par définition des égalités

$$\Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{H}om_{\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T), \mathcal{F}^{(\bullet)})) = \text{Hom}_{\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{U}}^{(\bullet)}(T \cap \mathcal{U}))}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{U}}^{(\bullet)}(T \cap \mathcal{U}), \mathcal{F}^{(\bullet)}|_{\mathcal{U}}) \quad (2.4.2.2)$$

$$= \varinjlim_{\lambda \in L} \varinjlim_{\chi \in M} \text{Hom}_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{U}}^{(\bullet)}(T \cap \mathcal{U})}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{U}}^{(\bullet)}(T \cap \mathcal{U}), \lambda^* \chi^* \mathcal{F}^{(\bullet)}|_{\mathcal{U}}) = \varinjlim_{\lambda \in L} \varinjlim_{\chi \in M} \Gamma(\mathcal{U}, \lambda^* \chi^* \mathcal{F}^{(\bullet)}). \quad (2.4.2.3)$$

En appliquant le foncteur  $\Gamma(\mathcal{U}, -)$  au morphisme 2.4.2.1, on obtient le morphisme canonique  $\varinjlim_{\lambda \in L} \varinjlim_{\chi \in M} \Gamma(\mathcal{U}, \lambda^* \chi^* \mathcal{F}^{(\bullet)}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{U}, \varinjlim \mathcal{F}^{(\bullet)})$ , qui est un isomorphisme.  $\square$

**Théorème 2.4.3.** *Pour tous  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \in D_{\text{coh}}^b(\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)))$ ,  $\mathcal{F}^{(\bullet)} \in D^b(\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)))$ , le morphisme de  $D(\text{Ab}_{\mathcal{P}})$  défini en 1.4.10.2 :*

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{D(\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)))}(\mathcal{E}^{(\bullet)}, \mathcal{F}^{(\bullet)}) \rightarrow \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}}(\varinjlim \mathcal{E}^{(\bullet)}, \varinjlim \mathcal{F}^{(\bullet)}). \quad (2.4.3.1)$$

*est un isomorphisme.*

*Démonstration.* Grâce au lemme [Har66, I.7.1.(ii)] (que l'on peut utiliser grâce à 2.2.8), comme pour  $\mathcal{F}^{(\bullet)}$  fixé les foncteurs sont way-out à droite, on se ramène au cas où  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \in \underline{LM}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . Comme le théorème est local en  $\mathcal{P}$ , d'après le lemme 2.2.2, on peut supposer que  $\mathcal{P}$  est affine et qu'il existe  $\lambda \in L$  et un  $\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$ -module  $\mathcal{G}^{(\bullet)}$  globalement de présentation finie tel que  $\mathcal{E}^{(\bullet)}$  et  $\mathcal{G}^{(\bullet)}$  soit isomorphe dans  $\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . On se ramène ainsi à vérifier le théorème pour  $\mathcal{G}^{(\bullet)}$  à la place de  $\mathcal{E}^{(\bullet)}$ . D'après la deuxième remarque de 2.1.9,  $G^{(0)}$  est un  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\lambda(0))}(T)$ -module cohérent et le morphisme canonique  $\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T) \otimes_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\lambda(0))}(T)} G^{(0)} \rightarrow \mathcal{G}^{(\bullet)}$  est isomorphisme. On obtient une résolution gauche de  $G^{(0)}$  par des  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\lambda(0))}(T)$ -modules libres de type fini. Celle-ci induit une résolution gauche de  $\mathcal{G}^{(\bullet)}$  par des  $\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$ -modules libres de type fini. En calquant la preuve de [Har66, I.7.1.(iv)] (on utilise les suites exactes de troncation), on se ramène à vérifier le théorème pour  $\mathcal{G}^{(\bullet)}$  de la forme  $(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))^N$ . Par additivité et comme  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T) \rightarrow \lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$  est une lim-ind-isogénie, on peut supposer  $\mathcal{G}^{(\bullet)} = \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$ . On conclut par construction de notre morphisme et de 2.4.2 (pour dériver le bifoncteur de gauche de 2.4.3.1 dans le cas particulier où  $\mathcal{E}^{(\bullet)} = \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$ , on prend une résolution par des injectifs de l'objet de  $K^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  associé à  $\mathcal{F}^{(\bullet)}$  via l'équivalence de catégories 1.2.11.1) ou alors en remarquant que l'on est dans la situation de 2.3.3.  $\square$

**Corollaire 2.4.4.** *1. Pour tous  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \in D_{\text{coh}}^b(\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)))$ ,  $\mathcal{F}^{(\bullet)} \in D^b(\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)))$ , le morphisme canonique de  $D(\text{Ab})$  de 1.4.10.3*

$$\mathbb{R}\text{Hom}_{D(\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)))}(\mathcal{E}^{(\bullet)}, \mathcal{F}^{(\bullet)}) \rightarrow \mathbb{R}\text{Hom}_{\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}}(\varinjlim \mathcal{E}^{(\bullet)}, \varinjlim \mathcal{F}^{(\bullet)}) \quad (2.4.4.1)$$

est un isomorphisme.

2. Le foncteur 1.4.9.1 se factorise en l'équivalence de catégories

$$\varinjlim : \underline{LM}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \cong \text{Coh}(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}). \quad (2.4.4.2)$$

où  $\text{Coh}(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}})$  désigne la catégorie des  $\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}$ -modules cohérents.

3. Le foncteur  $\varinjlim$  induit l'équivalence de catégories

$$\varinjlim : D_{\text{coh}}^b(\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))) \cong D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}). \quad (2.4.4.3)$$

*Démonstration.* On vérifie la première assertion de manière analogue à 2.4.3 (on peut aussi remarquer qu'en appliquant le foncteur  $\mathbb{R}\Gamma(\mathcal{P}, -)$  au morphisme de 2.4.3.1, on obtient grâce à 1.4.8.2 la flèche 2.4.4.1). Avec 1.4.8.1, on en déduit la pleine fidélité des foncteurs 2.4.4.3 et 2.4.4.2. Vérifions à présent que ces deux foncteurs sont essentiellement surjectifs. Soit  $\mathcal{E} \in D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}})$ . Quitte à utiliser des triangles distingués de troncation et à procéder par récurrence sur le nombre d'espaces de cohomologie non nuls, avec [BGK<sup>+</sup>87, I.2.18], par pleine fidélité de 2.4.4.3, on se ramène au cas où  $\mathcal{E}$  est un  $\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}$ -module cohérent. Or, grâce à [Ber96b, 3], il existe  $m_0 \in \mathbb{N}$ , un  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(m_0)}(T)$ -module cohérent  $\mathcal{E}^{(0)}$  et un isomorphisme  $\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}$ -linéaire de la forme  $\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(m_0)}(T)} \mathcal{E}^{(0)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$ . En posant  $\mathcal{E}^{(\bullet)} := \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet+m_0)}(T)\mathcal{E}^{(0)}$ , on obtient alors l'isomorphisme  $\varinjlim(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$ .  $\square$

La proposition qui suit améliore 2.2.2 :

**Lemme 2.4.5.** Soit  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \in \underline{LM}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . Il existe alors  $m_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $\mathcal{E}^{(\bullet)}$  soit isomorphe dans  $\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  à un  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet+m_0)}(T)$ -module localement de présentation finie.

*Démonstration.* Cela a été prouvé au cours de la preuve de 2.4.4.2.  $\square$

## 2.5 Comparaison entre les notions de cohérence

**Lemme 2.5.1.** Pour tout entier  $n \in \mathbb{Z}$ , on dispose de la factorisation  $\mathcal{H}^n : \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \rightarrow \underline{LM}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ .

*Démonstration.* Soient  $n \in \mathbb{Z}$  fixé et  $\mathcal{F}^{(\bullet)} \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . Quitte à remplacer  $\mathcal{F}^{(\bullet)}$  par un objet isomorphe dans  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ , on peut supposer qu'il existe  $\lambda \in L$  tel que  $\mathcal{F}^{(\bullet)} \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}}^b(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ , pour tout entier  $m$ ,  $\mathcal{F}^{(m)} \in D_{\text{coh}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\lambda(m))}(T))$  et tel que, pour tous  $m \leq m'$ , le morphisme canonique

$$\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\lambda(m'))}(T) \otimes_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\lambda(m))}(T)}^{\mathbb{L}} \mathcal{F}^{(m)} \rightarrow \mathcal{F}^{(m')} \quad (2.5.1.1)$$

soit un isomorphisme. On pose  $\mathcal{G}^{(\bullet)} := \mathcal{H}^n(\mathcal{F}^{(\bullet)})$ ,  $\mathcal{E}^{(0)} := \mathcal{H}^n(\mathcal{F}^{(0)})$  et  $\mathcal{E}^{(\bullet)} := \lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T) \otimes_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\lambda(0))}(T)} \mathcal{E}^{(0)}$ . Ainsi, d'après le lemme 2.1.7, le  $\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$ -module  $\mathcal{E}^{(\bullet)}$  est localement de présentation finie. On dispose du morphisme canonique  $\mathcal{H}^n(\mathcal{F}^{(0)}) \rightarrow \mathcal{H}^n(\mathcal{F}^{(\bullet)})$  qui induit par extension le morphisme  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \rightarrow \mathcal{G}^{(\bullet)}$  de  $M(\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . Comme les homomorphismes  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\lambda(0))}(T)_{\mathbb{Q}} \rightarrow \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\lambda(m))}(T)_{\mathbb{Q}}$  sont plats, on vérifie que cette flèche devient un isomorphisme après application du foncteur  $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} -$ . Pour tout entier  $m$ ,  $\mathcal{E}^{(m)}, \mathcal{G}^{(m)}$  sont des  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\lambda(m))}(T)$ -modules cohérents. Grâce au lemme 2.1.10, il en résulte que  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \rightarrow \mathcal{G}^{(\bullet)}$  est une ind-isogénie. On en déduit le résultat.  $\square$

**Lemme 2.5.2.** On dispose du diagramme canonique commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
D(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) & \xrightarrow{\quad} & \underline{LD}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) & \xrightarrow{\quad} & D(\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))) \\
\downarrow \mathcal{H}^n & \swarrow \lim & \downarrow \mathcal{H}^n & \swarrow \lim & \downarrow \mathcal{H}^n & \swarrow \lim & \downarrow \lim \\
M(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) & \xrightarrow{\quad} & \underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) & \xrightarrow{\quad} & \underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) & \xrightarrow{\quad} & D(\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))) \\
\downarrow \lim & \swarrow \mathcal{H}^n & \downarrow \lim & \swarrow \mathcal{H}^n & \downarrow \lim & \swarrow \mathcal{H}^n & \downarrow \lim \\
D(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}) & \xrightarrow{\quad} & D(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}) & \xrightarrow{\quad} & D(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}) & \xrightarrow{\quad} & D(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}) \\
\downarrow \mathcal{H}^n & \swarrow \mathcal{H}^n & \downarrow \mathcal{H}^n & \swarrow \mathcal{H}^n & \downarrow \mathcal{H}^n & \swarrow \mathcal{H}^n & \downarrow \mathcal{H}^n \\
M(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}) & \xrightarrow{\quad} & M(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}) & \xrightarrow{\quad} & M(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}) & \xrightarrow{\quad} & M(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}})
\end{array}
\tag{2.5.2.1}$$

dont la flèche horizontale du milieu du haut est la factorisation 1.2.6, dont les foncteurs verticaux du carré du milieu sont les factorisations canoniques (voir 1.4.9.1 pour le cas des modules).

*Démonstration.* Comme  $\mathbb{Q}$  est plat sur  $\mathbb{Z}$  et que le foncteur limite inductive sur le niveau est exact, les foncteurs verticaux des carrés de face sont exacts (pour celui de droite, cela découle de plus de [BP09, 2.3.4–5]). Cela implique que les carrés verticaux à droite, à gauche et du milieu sont commutatifs. De plus, comme le foncteur canonique  $M(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \rightarrow \underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  est exact (e.g. voir [BP09, 2.3.4]), le contour du grand rectangle du haut est commutatif. Comme  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  est une catégorie localisée de  $D(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ , la commutativité du carré de droite horizontal du haut en résulte. De la même façon, on vérifie que le carré verticale de droite du fond est commutatif.  $\square$

**2.5.3.** On déduit alors des lemmes 2.5.1 et 2.5.2 que l'équivalence de catégories  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \cong D^b(\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)))$  de 1.2.11.1 se factorise en le foncteur pleinement fidèle

$$\underline{LD}_{\mathbb{Q},\text{coh}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \rightarrow D_{\text{coh}}^b(\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))). \tag{2.5.3.1}$$

**Lemme 2.5.4.** Les équivalences du lemme 1.2.10 se factorisent en les équivalences de catégories quasi-inverses de la forme  $\underline{LD}_{\mathbb{Q},\text{coh}}^0(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \cong \underline{LD}_{\mathbb{Q},\text{coh}}^0(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  et  $\mathcal{H}^0: \underline{LD}_{\mathbb{Q},\text{coh}}^0(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \cong \underline{LM}_{\mathbb{Q},\text{coh}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ .

*Démonstration.* Grâce au lemme 1.2.10, il suffit de vérifier que les foncteurs sont bien définis. Grâce au lemme 2.5.1, on le sait déjà pour le foncteur  $\mathcal{H}^0$ . Traitons à présent le cas du foncteur oubli. Soient  $\lambda \in L$  et  $\mathcal{E}^{(\bullet)}$  un  $\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$ -module localement de présentation finie (comme d'habitude, grâce au lemme 2.2.2, il suffit de traiter ce cas). On pose  $\mathcal{F}^{(\bullet)} := \lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T) \otimes_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\lambda(0))}(T)}^{\mathbb{L}} \mathcal{E}^{(0)}$ . On obtient alors que  $\mathcal{F}^{(\bullet)} \in \underline{LD}_{\mathbb{Q},\text{coh}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  (avec la remarque 3.2.3, on vérifie que ce complexe est bien à cohomologie bornée). Soit  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ . Or, comme l'extension  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\lambda(0))}(T)_{\mathbb{Q}} \rightarrow \lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)_{\mathbb{Q}}$  est plate, on obtient  $(\mathcal{H}^n(\mathcal{F}^{(\bullet)}))_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^n(\mathcal{F}_{\mathbb{Q}}^{(\bullet)}) \xrightarrow{\sim} 0$ . Comme  $\mathcal{H}^n(\mathcal{F}^{(m)})$  est un  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\lambda(m))}(T)$ -module cohérent pour tout  $m$ , on déduit de 2.1.10 que  $\mathcal{H}^n(\mathcal{F}^{(m)})$  est ind-isogène à 0. En particulier,  $\mathcal{F}^{(\bullet)} \in \underline{LD}_{\mathbb{Q},\text{coh}}^0(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . Avec le lemme 1.2.10, cela entraîne l'isomorphisme  $\mathcal{F}^{(\bullet)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^0(\mathcal{F}^{(\bullet)})$  dans  $\underline{LD}_{\mathbb{Q},\text{coh}}^0(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . Comme  $\mathcal{H}^0(\mathcal{F}^{(\bullet)}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}^{(\bullet)}$ , on en déduit  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \in \underline{LD}_{\mathbb{Q},\text{coh}}^0(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ .  $\square$

**Théorème 2.5.5.** Le foncteur de 2.5.3.1 induit les équivalences de catégories :

$$\underline{LD}_{\mathbb{Q},\text{coh}}^0(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \cong D_{\text{coh}}^0(\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))), \quad \underline{LD}_{\mathbb{Q},\text{coh}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \cong D_{\text{coh}}^b(\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))). \tag{2.5.5.1}$$

*Démonstration.* Comme  $D_{\text{coh}}^0(\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))) \cong \underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ , le lemme 2.5.4 nous permet de conclure que tel est le cas du premier foncteur. Traitons à présent l'essentielle surjectivité du second foncteur. Soit  $\mathcal{E} \in D_{\text{coh}}^b(\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)))$ . Quitte à utiliser des triangles distingués de troncation et à procéder par récurrence sur le nombre d'espaces de cohomologie non nuls, avec [BGK<sup>+</sup>87, I.2.18], par pleine fidélité de notre foncteur, on se ramène au cas où  $\mathcal{E} \in \underline{LM}_{\mathbb{Q},\text{coh}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ , ce qui résulte encore du lemme 2.5.4.  $\square$



*Remarques 2.5.6.* Soit  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . Il résulte du théorème 2.5.5, que le fait que  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^0(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  est local en  $P$ .

**Lemme 2.5.7.** Notons  $D_{\text{coh}}^0(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}})$  la sous-catégorie pleine de  $D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}})$  des complexes  $\mathcal{E}$  tels que, pour tout entier  $n \neq 0$ , on ait  $\mathcal{H}^n(\mathcal{E}) = 0$ .

1. Soit  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . La propriété  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^0(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  équivaut à celle  $\varinjlim \mathcal{E}^{(\bullet)} \in D_{\text{coh}}^0(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}})$ .
2. On dispose du diagramme de foncteurs commutatif à équivalence canonique près

$$\begin{array}{ccccc} \underline{LM}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) & \xrightarrow{\cong} & \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^0(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) & \xrightarrow[\mathcal{H}^0]{\cong} & \underline{LM}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \\ \cong \downarrow \varinjlim & & \cong \downarrow \varinjlim & & \cong \downarrow \varinjlim \\ \text{Coh}(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}) & \xrightarrow{\cong} & D_{\text{coh}}^0(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}) & \xrightarrow[\mathcal{H}^0]{\cong} & \text{Coh}(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}), \end{array} \quad (2.5.7.1)$$

dont tous les foncteurs sont des équivalences de catégories.

*Démonstration.* On déduit de 2.5.2.1 que l'on bénéficie pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  du diagramme de foncteur commutatif à équivalence canonique près

$$\begin{array}{ccc} \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) & \xrightarrow[\mathcal{H}^n]{\cong} & \underline{LM}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \\ \cong \downarrow \varinjlim & & \cong \downarrow \varinjlim \\ D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}) & \xrightarrow[\mathcal{H}^n]{\cong} & \text{Coh}(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}), \end{array} \quad (2.5.7.2)$$

dont les foncteurs verticaux sont des équivalences de catégories (voir 2.4.4.2 pour celle de droite). On en déduit la première assertion du lemme. La seconde assertion découle aussitôt de la première équivalence de catégories du théorème 2.5.5.  $\square$

### 3 Foncteur de localisation en dehors d'un diviseur

#### 3.1 Produits tensoriels, quasi-cohérence et foncteur oubli

**3.1.1.** Pour tous  $\mathcal{E}, \mathcal{F} \in D^{-}({}^s\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(T))$  et  $\mathcal{M} \in D^{-}(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(T)^d)$ , on pose :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_i &:= \mathcal{M} \otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(T)}^{\mathbb{L}} \widetilde{\mathcal{D}}_{P_i}^{(m)}(T), \quad \mathcal{E}_i := \widetilde{\mathcal{D}}_{P_i}^{(m)}(T) \otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(T)}^{\mathbb{L}} \mathcal{E}, \\ \mathcal{M} \widehat{\otimes}_{\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(T)}^{\mathbb{L}} \mathcal{E} &:= \mathbb{R}\varprojlim_i (\mathcal{M}_i \otimes_{\widetilde{\mathcal{B}}_{P_i}^{(m)}(T)}^{\mathbb{L}} \mathcal{E}_i), \quad \mathcal{E} \widehat{\otimes}_{\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(T)}^{\mathbb{L}} \mathcal{F} := \mathbb{R}\varprojlim_i (\mathcal{E}_i \otimes_{\widetilde{\mathcal{B}}_{P_i}^{(m)}(T)}^{\mathbb{L}} \mathcal{F}_i), \\ \mathcal{M} \widehat{\otimes}_{\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(T)}^{\mathbb{L}} \mathcal{E} &:= \mathbb{R}\varprojlim_i (\mathcal{M}_i \otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}_{P_i}^{(m)}(T)}^{\mathbb{L}} \mathcal{E}_i). \end{aligned} \quad (3.1.1.1)$$

**3.1.2.** Pour tous  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \in D^{-}({}^s\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ ,  $\mathcal{M}^{(\bullet)} \in D^{-}(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)^d)$ , on pose

$$\mathcal{M}^{(\bullet)} \widehat{\otimes}_{\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}} \mathcal{E}^{(\bullet)} := (\mathcal{M}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(T)}^{\mathbb{L}} \mathcal{E}^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}. \quad (3.1.2.1)$$

Pour  $? = d$  ou  $? = g$ , on définit les bifoncteurs produits tensoriels

$$-\widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}} -: D^{-}({}^? \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \times D^{-}({}^s\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \rightarrow D^{-}({}^? \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)), \quad (3.1.2.2)$$

en posant, pour tous  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \in D^{-}({}^? \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ ,  $\mathcal{F}^{(\bullet)} \in D^{-}({}^s\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ ,

$$\mathcal{E}^{(\bullet)} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}} \mathcal{F}^{(\bullet)} := (\mathcal{E}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(T)}^{\mathbb{L}} \mathcal{F}^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}.$$

*Notations 3.1.3* (Quasi-cohérence et foncteur oubli partiel du diviseur). Soit  $D \subset T$  un second diviseur.

- Soit  $\mathcal{E}^{(m)} \in D^b({}^g\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(T))$ . Comme  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(T)$  (resp.  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(T)$ ) n'a pas de  $p$ -torsion, il résulte du théorème [Ber02, 3.2.2] de Berthelot que  $\mathcal{E}^{(m)}$  est quasi-cohérent au sens de Berthelot comme objet de  $D^b({}^g\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(m)})$  (voir la définition [Ber02, 3.2.1]) si et seulement si  $\mathcal{E}_0^{(m)} \in D_{\text{qc}}^b(\mathcal{O}_P)$  et le morphisme canonique  $\mathcal{E}^{(m)} \rightarrow \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(T) \hat{\otimes}_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(T)}^{\mathbb{L}} \mathcal{E}^{(m)}$  (resp.  $\mathcal{E}^{(m)} \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(T) \hat{\otimes}_{\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(T)}^{\mathbb{L}} \mathcal{E}^{(m)}$ ) est un isomorphisme. En particulier, cela ne dépend pas de  $T$ . En notant  $D_{\text{qc}}^b({}^g\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(T))$ , la sous-catégorie pleine de  $D^b({}^g\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(T))$  des complexes quasi-cohérents, on dispose alors du foncteur « oubli partiel du diviseur »  $\text{oub}_{D,T} : D_{\text{qc}}^b({}^g\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(T)) \rightarrow D_{\text{qc}}^b({}^g\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(D))$  qui est une factorisation du foncteur oubli canonique  $\text{oub}_{D,T} : D^b({}^g\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(T)) \rightarrow D^b({}^g\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(D))$ .
- De manière analogue, on note  $D_{\text{qc}}^b({}^g\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  la sous-catégorie pleine de  $D^b({}^g\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  des complexes  $\mathcal{E}^{(\bullet)}$  tels que, pour tout  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $\mathcal{E}_0^{(m)} \in D_{\text{qc}}^b(\mathcal{O}_P)$  et le morphisme canonique  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \rightarrow \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T) \hat{\otimes}_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)}^{\mathbb{L}} \mathcal{E}^{(\bullet)}$  soit un isomorphisme de  $D^b({}^g\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . On bénéficie encore du foncteur « oubli partiel du diviseur »  $\text{oub}_{D,T} : D_{\text{qc}}^b({}^g\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \rightarrow D_{\text{qc}}^b({}^g\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(D))$ .
- On note  $\underline{LD}_{\mathbb{Q},\text{qc}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  la sous-catégorie strictement pleine de  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  des complexes isomorphes dans  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  à un complexe appartenant à  $D_{\text{qc}}^b({}^g\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . Comme le foncteur  $\text{oub}_{D,T}$  (du second point) envoie une lim-ind-isogénie sur une lim-ind-isogénie, on en déduit sa factorisation de la forme :

$$\text{oub}_{D,T} : \underline{LD}_{\mathbb{Q},\text{qc}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \rightarrow \underline{LD}_{\mathbb{Q},\text{qc}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(D)). \quad (3.1.3.1)$$

- On note encore  $\text{oub}_{D,T} : D^b(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}) \rightarrow D^b(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}({}^{\dagger}D)_{\mathbb{Q}})$  le foncteur oubli partiel du diviseur.

*Remarques 3.1.4.* Soit  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \in D^b({}^g\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . La propriété  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \in D_{\text{qc}}^b({}^g\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  équivaut à, pour tout  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $\mathcal{E}^{(m)} \in D_{\text{qc}}^b({}^g\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(T))$ . Ainsi, la catégorie  $\underline{LD}_{\mathbb{Q},\text{qc}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  ci-dessus correspond à celle donnée par Berthelot dans [Ber02, 4.2.3].

Le lemme qui suit est annoncé implicitement dans [Ber02]. Donnons-en tout de même une vérification.

**Lemme 3.1.5.** *Le bifoncteur 3.1.2.2 se factorise en*

$$-\hat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}\dagger} - : \underline{LD}_{\mathbb{Q}}^-(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \times \underline{LD}_{\mathbb{Q}}^-(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \rightarrow \underline{LD}_{\mathbb{Q}}^-(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)). \quad (3.1.5.1)$$

*De plus, il préserve la quasi-cohérence des complexes à cohomologie bornée, i.e. se factorise en le bifoncteur*

$$-\hat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}\dagger} - : \underline{LD}_{\mathbb{Q},\text{qc}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \times \underline{LD}_{\mathbb{Q},\text{qc}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \rightarrow \underline{LD}_{\mathbb{Q},\text{qc}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)), \quad (3.1.5.2)$$

*de même en remplaçant  $D_{\text{qc}}^b$  par  $\underline{LD}_{\mathbb{Q},\text{qc}}^b$ .*

*Démonstration.* Soient  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \in D^-(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ ,  $\mathcal{F}^{(\bullet)} \in D^-(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . Soient  $\chi \in M$ ,  $\lambda \in L$ . Il existe alors un morphisme  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}\dagger} \lambda^* \chi^* \mathcal{F}^{(\bullet)} \rightarrow \lambda^* \chi^* \left( \mathcal{E}^{(\bullet)} \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}\dagger} \mathcal{F}^{(\bullet)} \right)$  (on résout  $\mathcal{F}^{(\bullet)}$  par des  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$ -modules plats, on utilise qu'un  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$ -module  $\mathcal{P}^{(\bullet)}$  est plat si et seulement si les  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(T)$ -module  $\mathcal{P}^{(m)}$  sont plats) induisant le diagramme canonique commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}^{(\bullet)} \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}\dagger} \mathcal{F}^{(\bullet)} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{E}^{(\bullet)} \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}\dagger} \lambda^* \chi^* \mathcal{F}^{(\bullet)} \\ \downarrow & \swarrow \text{dotted} & \downarrow \\ \lambda^* \chi^* \left( \mathcal{E}^{(\bullet)} \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}\dagger} \mathcal{F}^{(\bullet)} \right) & \xrightarrow{\quad} & \lambda^* \chi^* \left( \mathcal{E}^{(\bullet)} \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}\dagger} \lambda^* \chi^* \mathcal{F}^{(\bullet)} \right). \end{array}$$

On en déduit la factorisation

$$-\otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}\dagger} - : D^{-}({}^{\circ}\widetilde{\mathcal{D}}^{\bullet}(\mathcal{T})) \times \underline{LD}_{\mathbb{Q}}^{-}({}^{\circ}\widetilde{\mathcal{D}}^{\bullet}(\mathcal{T})) \rightarrow \underline{LD}_{\mathbb{Q}}^{-}({}^{\circ}\widetilde{\mathcal{D}}^{\bullet}(\mathcal{T})).$$

De même, on obtient la factorisation sur le premier facteur. Pour vérifier la factorisation par la catégorie des complexes quasi-cohérents, on utilise le théorème de Berthelot [Ber02, 3.2.3] seulement valable pour les complexes à cohomologie bornée, ainsi que des propriétés qui précèdent (la préservation de la bornitude résulte de la régularité de  $P$ ).

□

### 3.2 Définition et propriétés dans le cas des complexes

Soient  $m' \geq m \geq 0$  deux entiers,  $D' \subset D \subset T$  trois diviseurs (réduits) de  $P$ . On dispose alors des morphismes canoniques  $\mathcal{B}_{P_i}^{(m)}(D') \rightarrow \mathcal{B}_{P_i}^{(m)}(D) \rightarrow \mathcal{B}_{P_i}^{(m')}(T)$  (voir la construction dans [Ber96b, 4.2.3]).

**Lemme 3.2.1.** 1. *Le noyau de l'épimorphisme canonique  $\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(D) \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}} \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m')}(T) \rightarrow \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m')}(T)$  est un  $\mathcal{O}_P$ -module quasi-cohérent.*

2. *Le morphisme canonique  $\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(D) \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}}^{\mathbb{L}} \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m')}(T) \rightarrow \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(D) \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}} \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m')}(T)$  est un isomorphisme.*

*Démonstration.* Il suffit d'établir le lemme pour  $\lambda_0 = id$ . Comme le lemme est locale, on peut supposer  $\mathcal{P}$  affine, intègre et qu'il existe  $f \in \mathcal{O}_{\mathcal{P}}$  (resp.  $g \in \mathcal{O}_{\mathcal{P}}$ ) relevant une équation locale de  $T \subset P$  (resp.  $D \subset P$ ). Comme les diviseurs sont réduits,  $f$  est un multiple de  $g$  modulo  $\pi\mathcal{O}_{\mathcal{P}}$ . Comme  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m')}(T)$  ne dépend que de  $f$  modulo  $\pi\mathcal{O}_{\mathcal{P}}$  (voir [Ber96b, 4.2.3]), une fois  $g$  fixé, on peut choisir  $f$  égal à un multiple de  $g$ . Posons  $\mathcal{B}_{\mathcal{P}}^{(m')}(f) := \mathcal{O}_{\mathcal{P}}[X]/(f^{p^{m'+1}}X - p)$  et  $\mathcal{B}_{\mathcal{P}}^{(m)}(g) := \mathcal{O}_{\mathcal{P}}[X]/(g^{p^{m+1}}X - p)$ . On dispose du morphisme canonique de la forme  $\mathcal{B}_{\mathcal{P}}^{(m)}(g) \rightarrow \mathcal{B}_{\mathcal{P}}^{(m')}(f)$  (voir [Ber96b, 4.2.1.(ii)]).

1) Prouvons d'abord que, pour tout  $j \leq -1$ ,  $\mathcal{H}^j(\mathcal{B}_{\mathcal{P}}^{(m)}(g) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}}^{\mathbb{L}} \mathcal{B}_{\mathcal{P}}^{(m')}(f)) = 0$ .

On dispose de la suite exacte courte  $0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{P}}[X] \xrightarrow{g^{p^{m+1}}X - p} \mathcal{O}_{\mathcal{P}}[X] \rightarrow \mathcal{B}_{\mathcal{P}}^{(m)}(g) \rightarrow 0$ . Comme cette suite exacte donne

une résolution canonique de  $\mathcal{B}_{\mathcal{P}}^{(m)}(g)$  par des  $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}$ -modules plats, en appliquant le foncteur  $-\otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}} \mathcal{B}_{\mathcal{P}}^{(m')}(f)$  à cette suite exacte, on constate qu'il s'agit alors d'établir que  $g^{p^{m+1}}$  n'est pas un diviseur de zéro de  $\mathcal{B}_{\mathcal{P}}^{(m')}(f)$ . Comme  $\mathcal{B}_{\mathcal{P}}^{(m')}(f)$  est intègre (voir [Ber96b, 4.3.3]), on conclut.

2) En notant abusivement  $\frac{p}{g^{p^{m+1}}}$  la classe de  $X$  dans  $\mathcal{B}_{\mathcal{P}}^{(m)}(g)$  et encore  $\frac{p}{g^{p^{m+1}}}$  son image dans  $\mathcal{B}_{\mathcal{P}}^{(m')}(f)$ , on obtient le diagramme canonique de morphismes  $\mathcal{B}_{\mathcal{P}}^{(m')}(f)$ -linéaires :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{O}_{\mathcal{P}}[X] \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}} \mathcal{B}_{\mathcal{P}}^{(m')}(f) & \xrightarrow{(g^{p^{m+1}}X - p) \otimes id} & \mathcal{O}_{\mathcal{P}}[X] \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}} \mathcal{B}_{\mathcal{P}}^{(m')}(f) & \longrightarrow & \mathcal{B}_{\mathcal{P}}^{(m)}(g) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}} \mathcal{B}_{\mathcal{P}}^{(m')}(f) & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \\ \mathcal{B}_{\mathcal{P}}^{(m')}(f)[X] & \xrightarrow{X - \frac{p}{g^{p^{m+1}}}} & \mathcal{B}_{\mathcal{P}}^{(m')}(f)[X] & \longrightarrow & \mathcal{B}_{\mathcal{P}}^{(m')}(f) & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

dont les suites horizontales forment des suites exactes et dont le carré, ayant pour flèches horizontales les morphismes de  $\mathcal{B}_{\mathcal{P}}^{(m')}(f)$ -algèbres induit par respectivement  $X \mapsto \frac{p}{g^{p^{m+1}}} \otimes 1$  et  $X \mapsto \frac{p}{g^{p^{m+1}}}$ , est commutatif. On en déduit que le noyau, noté  $\mathcal{N}_0$ , de la surjection canonique  $\mathcal{B}_{\mathcal{P}}^{(m)}(g) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}} \mathcal{B}_{\mathcal{P}}^{(m')}(f) \rightarrow \mathcal{B}_{\mathcal{P}}^{(m')}(f)$  est annulé par  $g^{p^{m+1}} \otimes 1$  et donc par  $p$ . Comme  $\mathcal{B}_{\mathcal{P}}^{(m')}(f)$  est sans  $p$ -torsion, comme  $\mathcal{B}_{P_i}^{(m)}(D) \otimes_{\mathcal{O}_{P_i}} \mathcal{B}_{P_i}^{(m)}(T) \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}/\pi^{i+1}\mathcal{V} \otimes_{\mathcal{V}} \mathcal{B}_{\mathcal{P}}^{(m)}(g) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}} \mathcal{B}_{\mathcal{P}}^{(m')}(f)$ , on en déduit la suite exacte courte  $0 \rightarrow \mathcal{N}_0 \rightarrow \mathcal{B}_{P_i}^{(m)}(D) \otimes_{\mathcal{O}_{P_i}} \mathcal{B}_{P_i}^{(m)}(T) \rightarrow \mathcal{B}_{P_i}^{(m)}(T) \rightarrow 0$ . Pour  $i = 0$ , cela entraîne que  $\mathcal{N}_0$  est un  $\mathcal{O}_P$ -module quasi-cohérent. D'après [Ber02, 3.2.1.b)], il en résulte que  $\mathcal{N}_0 \in D_{qc}^b(\mathcal{O}_P)$ . En passant à la limite projectif, on obtient de plus la suite exacte :  $0 \rightarrow \mathcal{N}_0 \rightarrow \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(D) \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}} \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m')}(T) \rightarrow \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m')}(T) \rightarrow 0$ . Comme  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m')}(T)$  est sans

$p$ -torsion et séparé complet, alors  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m')}(T) \in D_{\text{qc}}^b(\mathcal{O}_{\mathcal{P}})$ . Il en est donc de même de  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(D) \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}} \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m')}(T)$ . D'après [Ber02, 3.2.2],  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(D) \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}}^{\mathbb{L}} \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m')}(T) \in D_{\text{qc}}^b(\mathcal{O}_{\mathcal{P}})$  et  $\mathcal{O}_{P_i} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}}^{\mathbb{L}} \left( \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(D) \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}}^{\mathbb{L}} \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m')}(T) \right) \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}_{P_i}^{(m)}(D) \otimes_{\mathcal{O}_{P_i}}^{\mathbb{L}} \mathcal{B}_{P_i}^{(m')}(T)$ . Il reste à établir l'isomorphisme canonique  $\mathcal{O}_{P_i} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}}^{\mathbb{L}} \left( \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(D) \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}} \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m')}(T) \right) \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}_{P_i}^{(m)}(D) \otimes_{\mathcal{O}_{P_i}}^{\mathbb{L}} \mathcal{B}_{P_i}^{(m')}(T)$ . Or, en appliquant le foncteur  $\mathcal{O}_{P_i} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}}^{\mathbb{L}} -$  au diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{N}_0 & \longrightarrow & \mathcal{B}_{\mathcal{P}}^{(m)}(g) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}} \mathcal{B}_{\mathcal{P}}^{(m')}(f) & \longrightarrow & \mathcal{B}_{\mathcal{P}}^{(m')}(f) \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{N}_0 & \longrightarrow & \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(D) \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}} \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m')}(T) & \longrightarrow & \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m')}(T) \longrightarrow 0, \end{array}$$

on obtient  $\mathcal{O}_{P_i} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}}^{\mathbb{L}} \left( \mathcal{B}_{\mathcal{P}}^{(m)}(g) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}} \mathcal{B}_{\mathcal{P}}^{(m')}(f) \right) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{P_i} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}}^{\mathbb{L}} \left( \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(D) \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}} \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m')}(T) \right)$ . Enfin, d'après l'étape 1), on obtient  $\mathcal{O}_{P_i} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}}^{\mathbb{L}} \left( \mathcal{B}_{\mathcal{P}}^{(m)}(g) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}} \mathcal{B}_{\mathcal{P}}^{(m')}(f) \right) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{O}_{P_i} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}}^{\mathbb{L}} \mathcal{B}_{\mathcal{P}}^{(m)}(g)) \otimes_{\mathcal{O}_{P_i}}^{\mathbb{L}} (\mathcal{O}_{P_i} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}}^{\mathbb{L}} \mathcal{B}_{\mathcal{P}}^{(m')}(f)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}_{P_i}^{(m)}(D) \otimes_{\mathcal{O}_{P_i}}^{\mathbb{L}} \mathcal{B}_{P_i}^{(m')}(T)$ .  $\square$

**Proposition 3.2.2.** *Les morphismes canoniques  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m')}(T) \rightarrow \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(D) \widehat{\otimes}_{\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(D)}^{\mathbb{L}} \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m')}(T) \rightarrow \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(D) \widehat{\otimes}_{\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(D)} \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m')}(T) \rightarrow \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m')}(T)$  sont des isogénies.*

*Démonstration.* D'après le lemme 3.2.1, le morphisme canonique  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(D') \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}}^{\mathbb{L}} \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m')}(T) \rightarrow \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m')}(T)$  est une isogénie. Comme le foncteur  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(D) \widehat{\otimes}_{\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(D')}^{\mathbb{L}} -$  envoie une isogénie sur une isogénie, il en est donc de même du morphisme induit  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(D) \widehat{\otimes}_{\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(D')}^{\mathbb{L}} (\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(D') \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}}^{\mathbb{L}} \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m')}(T)) \rightarrow \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(D) \widehat{\otimes}_{\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(D')}^{\mathbb{L}} \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m')}(T)$ . Comme la composition  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(D) \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}}^{\mathbb{L}} \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m')}(T) \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(D) \widehat{\otimes}_{\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(D')}^{\mathbb{L}} (\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(D') \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}}^{\mathbb{L}} \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m')}(T)) \rightarrow \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(D) \widehat{\otimes}_{\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(D')}^{\mathbb{L}} \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m')}(T) \rightarrow \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m')}(T)$  est égal au morphisme canonique de la forme apparaissant dans le lemme 3.2.1, ce composé est donc une isogénie. Il en résulte que le morphisme canonique  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(D) \widehat{\otimes}_{\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(D')}^{\mathbb{L}} \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m')}(T) \rightarrow \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m')}(T)$  est une isogénie. De même (on enlève les  $\mathbb{L}$ ) on vérifie que le morphisme canonique  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(D) \widehat{\otimes}_{\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(D')} \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m')}(T) \rightarrow \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m')}(T)$  est une isogénie. Comme le composé des deux morphismes canoniques  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m')}(T) \rightarrow \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(D) \widehat{\otimes}_{\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(D')} \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m')}(T) \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m')}(T)$  est l'identité, il en résulte que le premier morphisme est aussi une isogénie.  $\square$

*Remarques 3.2.3.* Les foncteurs de la forme  $\mathcal{B}_{P_i}^{(m')}(T) \otimes_{\mathcal{O}_{P_i}}^{\mathbb{L}} -$  sont de dimension cohomologique égale à 1. En effet, comme cela est locale, on peut supposer  $\mathcal{P}$  affine, intègre et qu'il existe  $f \in \mathcal{O}_{\mathcal{P}}$  relevant une équation locale  $T \subset P$ . Il suffit alors de considérer la suite exacte courte  $0 \rightarrow \mathcal{O}_{P_i}[X] \xrightarrow{\quad} \mathcal{O}_{P_i}[X] \rightarrow \mathcal{B}_{P_i}^{(m')}(T) \rightarrow 0$  où  $\bar{f}$  est la réduction de  $f$  modulo  $\pi^{m'+1}$ , qui donne une résolution canonique à la longueur souhaitée de  $\mathcal{B}_{P_i}^{(m')}(T)$  par des  $\mathcal{O}_{P_i}$ -modules plats. Le foncteur  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m')}(T) \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}}^{\mathbb{L}} -$  est way-out (avec une amplitude qui ne dépend pas de  $m'$ ) sur  $D_{\mathbb{Q}}^-(\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(D))$ .

Conformément aux notations de [Ber02], notons  $D_{\mathbb{Q},\text{qc}}^-(\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(D))$  la localisation de la catégorie  $D_{\text{qc}}^-(\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(D))$  par les isogénies. Pour tout  $\mathcal{E}^{(m)} \in D_{\mathbb{Q},\text{qc}}^-(\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(D))$ , le morphisme canonique  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m')}(T) \widehat{\otimes}_{\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(D)}^{\mathbb{L}} \mathcal{E}^{(m)} \rightarrow \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m')}(T) \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}}^{\mathbb{L}} \mathcal{E}^{(m)}$  est un isomorphisme. En effet, on dispose dans  $D_{\mathbb{Q},\text{qc}}^-(\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m')}(T))$  des isomorphismes

$$\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m')}(T) \widehat{\otimes}_{\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(D)}^{\mathbb{L}} \mathcal{E}^{(m)} \xrightarrow[3.2.1]{\sim} (\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m')}(T) \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}}^{\mathbb{L}} \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(D)) \widehat{\otimes}_{\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(D)}^{\mathbb{L}} \mathcal{E}^{(m)} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m')}(T) \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}}^{\mathbb{L}} \mathcal{E}^{(m)}.$$

On en déduit que le foncteur  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m')}(T) \widehat{\otimes}_{\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(D)}^{\mathbb{L}} -$  est way-out (avec une amplitude indépendante de  $m'$ ) sur  $D_{\mathbb{Q},\text{qc}}^-(\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(D))$  et en particulier on obtient la factorisation  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T) \widehat{\otimes}_{\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(D)}^{\mathbb{L}} - : D_{\mathbb{Q},\text{qc}}^b(\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(D)) \rightarrow D_{\mathbb{Q},\text{qc}}^b(\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ .

**3.2.4.** Pour tout  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \in D^-(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(D))$ , comme pour [Car06, 1.1.8] (i.e. il est inutile de localiser pour obtenir la commutativité du diagramme ci-dessous), on bénéficie du diagramme commutatif dans  $D^-(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  :

$$\begin{array}{ccc} (\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(T) \hat{\otimes}_{\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(D)}^{\mathbb{L}} \mathcal{E}^{(m)})_{m \in \mathbb{N}} & \xrightarrow{\text{def}} & \mathcal{O}_{\mathcal{P}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}} \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}(\dagger D)_{\mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}} \mathcal{E}^{(\bullet)} \\ \sim \downarrow & & \sim \downarrow \\ (\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(T) \hat{\otimes}_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(D)}^{\mathbb{L}} \mathcal{E}^{(m)})_{m \in \mathbb{N}} & \xrightarrow{\text{def}} & \mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}} \hat{\otimes}_{\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger D)_{\mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}} \mathcal{E}^{(\bullet)} =: (\dagger T, D)(\mathcal{E}^{(\bullet)}). \end{array} \quad (3.2.4.1)$$

Comme pour 3.1.5, on obtient avec la remarque 3.2.3 la factorisation de ce foncteur :

$$(\dagger T, D) := \mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}} \hat{\otimes}_{\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger D)_{\mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}} - : \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{qc}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(D)) \rightarrow \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{qc}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)), \quad (3.2.4.2)$$

qui reste encore valable avec  $D_{\text{qc}}^b$  à la place de  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{qc}}^b$ . On écrit aussi  $\mathcal{E}^{(\bullet)}(\dagger T, D) := (\dagger T, D)(\mathcal{E}^{(\bullet)})$ . Ce foncteur  $(\dagger T, D)$  est le foncteur extension (du diviseur de  $D$  à  $T$ ). On dit aussi que  $(\dagger T, D)$  est le foncteur de localisation en dehors de  $T$ . Lorsque  $D = \emptyset$  où plus généralement lorsqu'il n'y a aucune confusion à craindre sur  $D$ , on omet de l'indiquer. On note de manière analogue pour les complexes cohérents :

$$(\dagger T, D) := \mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger D)_{\mathbb{Q}}} - : D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger D)_{\mathbb{Q}}) \rightarrow D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}). \quad (3.2.4.3)$$

**Proposition 3.2.5.** Soit  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \in D_{\text{qc}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ .

1. Le morphisme canonique fonctoriel en  $\mathcal{E}^{(\bullet)}$  :

$$(\dagger T, D) \circ \text{oub}_{D, T}(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \rightarrow \mathcal{E}^{(\bullet)}, \quad (3.2.5.1)$$

est un isomorphisme de  $D_{\text{qc}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ .

2. Le morphisme canonique fonctoriel en  $\mathcal{E}^{(\bullet)}$  :

$$\text{oub}_{D, T}(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \rightarrow \text{oub}_{D, T} \circ (\dagger T, D) \circ \text{oub}_{D, T}(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \quad (3.2.5.2)$$

est un isomorphisme de  $D_{\text{qc}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(D))$ .

3. Les foncteurs  $\text{oub}_{D, T} : D_{\text{qc}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \rightarrow D_{\text{qc}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(D))$  et  $\text{oub}_{D, T} : \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{qc}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \rightarrow \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{qc}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(D))$  sont pleinement fidèles.

*Démonstration.* Avec les notations 3.2.4.1, on dispose des isomorphismes canoniques :

$$\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T) \hat{\otimes}_{\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(D)}^{\mathbb{L}} \mathcal{E}^{(\bullet)} \xrightarrow{\sim} \left( \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T) \hat{\otimes}_{\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(D)}^{\mathbb{L}} \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T) \right) \hat{\otimes}_{\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)}^{\mathbb{L}} \mathcal{E}^{(\bullet)} \xrightarrow[3.2.2]{\sim} \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T) \hat{\otimes}_{\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)}^{\mathbb{L}} \mathcal{E}^{(\bullet)} \xleftarrow{\sim} \mathcal{E}^{(\bullet)}$$

est un isomorphisme. Cette composition est le morphisme canonique  $(\dagger T, D) \circ \text{oub}_{D, T}(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \rightarrow \mathcal{E}^{(\bullet)}$  qui est donc un isomorphisme. Il en résulte l'isomorphisme canonique  $\text{oub}_{D, T} \circ (\dagger T, D) \circ \text{oub}_{D, T}(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \xrightarrow{\sim} \text{oub}_{D, T}(\mathcal{E}^{(\bullet)})$  de  $D^-(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(D))$  (et donc de  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{qc}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(D))$ ). Comme le composé  $\text{oub}_{T, D}(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \rightarrow \text{oub}_{D, T} \circ (\dagger T, D) \circ \text{oub}_{D, T}(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \xrightarrow{\sim} \text{oub}_{D, T}(\mathcal{E}^{(\bullet)})$  est l'identité, on en déduit que le morphisme canonique 3.2.5.2 est un isomorphisme. La pleine fidélité de  $\text{oub}_{D, T}$  découle des deux premières assertions.  $\square$

**Corollaire 3.2.6.** Soit  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \in D_{\text{qc}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(D))$ . Le morphisme canonique fonctoriel en  $\mathcal{E}^{(\bullet)}$  :

$$(\dagger T, D') \circ \text{oub}_{D', D}(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \rightarrow (\dagger T, D)(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \quad (3.2.6.1)$$

est un isomorphisme de  $D_{\text{qc}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ .

*Démonstration.* D'après 3.2.5.1, on bénéficie de l'isomorphisme canonique  $(^\dagger D, D') \circ \text{oub}_{D', D}(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}^{(\bullet)}$ . En lui appliquant le foncteur  $(^\dagger T, D)$ , l'isomorphisme  $(^\dagger T, D') \xrightarrow{\sim} (^\dagger T, D) \circ (^\dagger D, D')$  nous permet alors de conclure.  $\square$

Après avoir traité le cas d'un diviseur inclus dans un autre, terminons cette section par considérer le cas de deux diviseurs dont les composantes irréductibles sont distinctes.

**Lemme 3.2.7.** *Soient  $T, T'$  deux diviseurs de  $P$  dont les composantes irréductibles sont distinctes,  $\mathcal{U}'$  l'ouvert de  $\mathcal{P}$  complémentaire de  $T \cup T'$ .*

1. *Pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , le morphisme canonique  $\widetilde{\mathcal{B}}_{P_i}^{(m)}(T) \otimes_{\mathcal{O}_{P_i}}^{\mathbb{L}} \widetilde{\mathcal{B}}_{P_i}^{(m)}(T') \rightarrow \widetilde{\mathcal{B}}_{P_i}^{(m)}(T) \otimes_{\mathcal{O}_{P_i}} \widetilde{\mathcal{B}}_{P_i}^{(m)}(T')$  est un isomorphisme.*
2. *Le morphisme canonique  $\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(T) \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}}^{\mathbb{L}} \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(T') \rightarrow \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(T) \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}} \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(T')$  est un isomorphisme et la  $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}$ -algèbre  $\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(T) \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}} \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(T')$  est sans  $p$ -torsion.*
3. *Le morphisme canonique de  $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}$ -algèbres  $\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(T) \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}} \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(T') \rightarrow j_* \mathcal{O}_{\mathcal{U}'}$  est un monomorphisme.*
4. *Soient  $\chi, \lambda: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  définis respectivement pour tout entier  $m \in \mathbb{N}$  en posant  $\chi(m) := p^{p-1}$  et  $\lambda(m) := m + 1$ .*
  1. *On dispose des monomorphismes canoniques de la forme  $\alpha^{(\bullet)}: \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T) \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}} \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T') \rightarrow \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T \cup T')$  et  $\beta^{(\bullet)}: \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T \cup T') \rightarrow \lambda^* \chi^*(\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T) \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}} \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T'))$  tels que  $\lambda^* \chi^*(\alpha^{(\bullet)}) \circ \beta^{(\bullet)}$  et  $\beta^{(\bullet)} \circ \alpha^{(\bullet)}$  sont les morphismes canoniques.*

*Démonstration.* Il ne coûte pas cher de supposer  $\lambda_0 = id$ . Comme les assertions sont locales, on peut supposer  $\mathcal{P}$  affine, intègre et qu'il existe  $f_1, \dots, f_r \in \mathcal{O}_{\mathcal{P}}$  (resp.  $f'_1, \dots, f'_r \in \mathcal{O}_{\mathcal{P}}$ ) relevant une équation locale des composantes irréductibles de  $T \subset P$  (resp.  $T' \subset P$ ). Notons  $f := \prod_{i=1}^r f_i$  et  $f' := \prod_{i=1}^r f'_i$ . On dispose alors des égalités  $\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\mathcal{P}}\{X\}/(f^{p^{m+1}}X - p)$  et  $\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T') \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\mathcal{P}}\{X'\}/((f')^{p^{m+1}}X' - p)$ , où on a pris soin de distinguer les variables  $X$  et  $X'$ .

1) Il s'agit d'établir que, pour tout  $j \leq -1$ ,  $\mathcal{H}^j(\widetilde{\mathcal{B}}_{P_i}^{(m)}(T) \otimes_{\mathcal{O}_{P_i}}^{\mathbb{L}} \widetilde{\mathcal{B}}_{P_i}^{(m)}(T')) = 0$ .

On dispose de la suite exacte courte  $0 \rightarrow \mathcal{O}_{P_i}[X] \xrightarrow{\quad} \mathcal{O}_{P_i}[X] \rightarrow \mathcal{B}_{P_i}^{(m)}(T) \rightarrow 0$  où  $\bar{f}$  est la réduction de  $f$  modulo  $\pi$ .

$\pi^{i+1}$ . Comme cette suite exacte donne une résolution canonique de  $\mathcal{B}_{P_i}^{(m)}(T)$  par des  $\mathcal{O}_{P_i}$ -modules plats, en appliquant le foncteur  $-\otimes_{\mathcal{O}_{P_i}} \mathcal{B}_{P_i}^{(m)}(T')$  à cette suite exacte, on constate qu'il s'agit alors d'établir que l'image de  $\bar{f}$  dans  $\mathcal{B}_{P_i}^{(m)}(T')$  est non nul et n'est pas un diviseur de zéro. Comme  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(T')$  est sans- $p$ -torsion (voir [Ber96b, 4.3.3]), on se ramène au cas  $i = 0$ . On a alors  $\mathcal{B}_P^{(m)}(T') \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_P[X']/(\bar{f}'^{p^{m+1}}X' - p)$  où  $\bar{f}'$  est la réduction de  $f'$  modulo  $\pi$ . Soient  $P(X'), Q(X') \in \mathcal{O}_P[X']$  tels que  $\bar{f} \cdot P(X') = (\bar{f}'^{p^{m+1}}X') \cdot Q(X')$ . Comme les composantes irréductibles de  $T$  et  $T'$  sont distinctes, il en résulte que  $\bar{f}'^{p^{m+1}}X'$  divise  $P(X')$ . D'où le résultat.

2) En appliquant le foncteur  $\mathbb{R}\lim_{\leftarrow i}$  aux isomorphismes canoniques de 1), via Mittag-Leffler, on obtient l'isomor-

phisme de 2) voulu. De plus, d'après [Ber02, 3.2.2],  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(T) \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}}^{\mathbb{L}} \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(T') \in D_{\text{qc}}^b(\mathcal{O}_{\mathcal{P}})$  et  $k \otimes_{\mathbb{V}}^{\mathbb{L}} (\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(T) \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}}^{\mathbb{L}} \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(T')) \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}_P^{(m)}(T) \otimes_{\mathcal{O}_P}^{\mathbb{L}} \mathcal{B}_P^{(m)}(T')$ . Il en résulte d'après 1) et l'isomorphisme de 2) que  $\mathcal{H}^{-1}(k \otimes_{\mathbb{V}}^{\mathbb{L}} (\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(T) \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}}^{\mathbb{L}} \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(T'))) \xrightarrow{\sim} 0$ .

3) Il suffit de reprendre le fil de la preuve de [Ber96b, 4.3.3.(ii)] : notons  $\widehat{B} := \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(T) \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}} \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(T')$ . Comme  $\widehat{B}$  est sans  $p$ -torsion, il est aussi sans  $f$ -torsion et s'injecte donc  $\widehat{B}_f$ . Notons  $\mathcal{U}$  l'ouvert de  $\mathcal{P}$  complémentaire de  $T$ . On obtient :  $(\widehat{B}_f)^{\wedge} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\mathcal{U}} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}} \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(T') \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{U}}^{(m)}(T' \cap \mathcal{U}) \subset \mathcal{O}_{\mathcal{U}'}$  (cette dernière inclusion est [Ber96b, 4.3.3.(ii)]). Il suffit donc de prouver que  $\widehat{B}_f$  est  $p$ -adiquement séparé. On note encore  $X$ , l'image de  $X$  dans  $\widehat{B}$ . Comme  $X$  est un diviseur de  $p$ , il suffit d'établir que  $\widehat{B}_f$  est  $X$ -adiquement séparé. Soient  $b, x \in \widehat{B}_f$  tels que  $(1 - bX)x = 0$ . Il s'agit de prouver que  $x = 0$ . Quitte à multiplier par une puissance de  $f$  assez grande, on peut supposer  $b, x \in \widehat{B}$  et qu'il existe  $s \in \mathbb{N}$  assez grand tel que  $(f^s - bX)x = 0$ . Or,  $\widehat{B}/X\widehat{B} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\mathcal{P}}/p\mathcal{O}_{\mathcal{P}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}} \mathcal{O}_{\mathcal{P}}\{X'\}/((f')^{p^{m+1}}X' - p) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{O}_{\mathcal{P}}/p\mathcal{O}_{\mathcal{P}})[X']/(\bar{f}'^{p^{m+1}}X') \xrightarrow{\sim}$

$B_p^{(m)}(T')$ . Comme l'image de  $f^s$  dans  $B_p^{(m)}(T')$  est non nul et n'est pas un diviseur de zéro (voir l'étape 1), on en déduit que l'égalité  $(f^s - bX)x = 0$  implique que  $x \in X\widehat{B}$ . Par itération du raisonnement, on obtient  $x \in \cap_{n \in \mathbb{N}} X^n \widehat{B}$ . Il existe donc  $c \in \widehat{B}$  tel que  $(1 - cX)x = 0$ .

Or,  $\widehat{B}/p\widehat{B} \xrightarrow{\sim} B_p^{(m)}(T')[X]/(\bar{f}^{p^{m+1}}X)$ . La relation  $(1 - cX)x = 0$  dans  $\widehat{B}$  induit dans  $\widehat{B}/p\widehat{B}$  l'égalité  $(1 - \bar{c}X)\bar{x} = 0$ . Soient  $\bar{c}(X), \bar{x}(X)$  des éléments de  $B_p^{(m)}(T')[X]$  induisant modulo  $\bar{f}^{p^{m+1}}X$  les éléments  $\bar{c}, \bar{x}$ . Ainsi,  $(1 - \bar{c}(X)X)\bar{x}(X) = \bar{f}^{p^{m+1}}XQ(X)$ , avec  $Q(X) \in B_p^{(m)}(T')[X]$ . Il en résulte qu'il existe  $R(X) \in B_p^{(m)}(T')[X]$  tel que  $\bar{x}(X) = XR(X)$ . D'où  $(1 - \bar{c}(X)X)R(X) = \bar{f}^{p^{m+1}}Q(X)$ , ce qui entraîne que  $\bar{f}^{p^{m+1}}$  divise  $R(X)$ . Ainsi, on a vérifié que  $\bar{x} = 0$ , i.e.  $x \in p\widehat{B}$ . Comme  $\widehat{B}$  est sans  $p$ -torsion, en réitérant le procédé on obtient  $x \in \cap_{n \in \mathbb{N}} p^n \widehat{B} = \{0\}$ , ce qu'il fallait démontrer.

4) La définition du morphisme  $\alpha^{(m)}$  est triviale. Le fait que cela soit un monomorphisme résulte aussitôt de 3. De plus, on note  $\gamma^{(m)}: \mathcal{O}_{\mathcal{P}}[X] \rightarrow (\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m+1)}(T) \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}} \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m+1)}(T'))_{\mathbb{Q}}$  le morphisme de  $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}$ -algèbres défini en posant  $\gamma^{(m)}(X) := \frac{1}{p}(\frac{p}{f^{p^{m+1}}} \widehat{\otimes} \frac{p}{(f')^{p^{m+1}}})$ . Soient  $n \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{N}$  tels que  $0 \leq r < p$  et  $n = pq + r$ . On calcule  $\gamma^{(m)}(X^n) = \frac{1}{p^r}(\frac{p}{f^{p^{m+1}}} \widehat{\otimes} \frac{p}{(f')^{p^{m+1}}})^r \left( p^{p-2}(\frac{p}{f^{p^{m+2}}} \widehat{\otimes} \frac{p}{(f')^{p^{m+2}}}) \right)^q$ . Le morphisme  $p^{p-1}\gamma^{(m)}$  se factorise alors canoniquement en le morphisme de la forme  $\beta^{(m)}$  voulu. □

**Proposition 3.2.8.** *Soient  $T', T$  deux diviseurs de  $P$ . Pour tout  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{qc}}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}),$  on dispose de l'isomorphisme  $(\dagger T') \circ (\dagger T)(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \rightarrow (T' \cup T)(\mathcal{E}^{(\bullet)})$  fonctoriel en  $T, T', \mathcal{E}^{(\bullet)}$ .*

*Démonstration.* Soient  $T_1, T_2, T''$  des diviseurs dont les composantes irréductibles sont distinctes deux à deux et tels que  $T = T_1 \cup T''$  et  $T' = T_2 \cup T''$ . Par associativité du produit tensoriel, il résulte de 3.2.7 que  $(\dagger T') \circ (\dagger T)(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \xrightarrow{\sim} (\dagger T_2) \circ (\dagger T'') \circ (\dagger T'') \circ (\dagger T_1)(\mathcal{E}^{(\bullet)})$ . Grâce à 3.2.5, on obtient  $(\dagger T'') \circ (\dagger T'') \xrightarrow{\sim} (\dagger T'')$ . Avec encore 3.2.7, comme  $T \cup T' = T_1 \cup T'' \cup T_2$ , on en déduit le résultat. □

### 3.3 Définition et propriétés dans le cas des modules

Soit  $T' \supset T$  un second diviseur de  $P$ .

**3.3.1.** Soit  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \in M(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . On définit le foncteur extension du diviseur  $(\dagger T', T)^0: M(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \rightarrow M(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T'))$  en posant  $(\dagger T', T)^0(\mathcal{E}^{(\bullet)}) := \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T') \widehat{\otimes}_{\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)} \mathcal{E}^{(\bullet)}$ . On dit que  $\mathcal{E}^{(\bullet)}$  est « faiblement quasi-cohérent » si le morphisme canonique  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \rightarrow (\dagger T, T)^0(\mathcal{E}^{(\bullet)})$  est un isomorphisme. Il est clair que si on a en plus  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \in D_{\text{qc}}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ , alors  $\mathcal{E}^{(\bullet)}$  est faiblement quasi-cohérent (par contre, la réciproque est fausse). On note  $M_{\text{fqc}}(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ , la sous-catégorie pleine de  $M(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  des modules faiblement quasi-cohérents.

**3.3.2.** Comme la faible quasi-cohérence est une notion indépendante du choix des diviseurs, le foncteur oubli se factorise en un foncteur de la forme  $\text{oub}_{T, T'}: M_{\text{fqc}}(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T')) \rightarrow M_{\text{fqc}}(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . La factorisation  $(\dagger T', T)^0: M_{\text{fqc}}(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \rightarrow M_{\text{fqc}}(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T'))$  est encore plus évidente. Comme pour 3.2.5 (i.e., il suffit d'enlever les «  $\mathbb{L}$  » dans la preuve), on déduit de 3.2.2 que, pour tout  $\mathcal{E}'^{(\bullet)} \in M_{\text{fqc}}(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T'))$ , les morphismes canoniques fonctoriels en  $\mathcal{E}'^{(\bullet)}$ :

$$\begin{aligned} \text{oub}_{T, T'}(\mathcal{E}'^{(\bullet)}) &\rightarrow \text{oub}_{T, T'} \circ (\dagger T', T)^0 \circ \text{oub}_{T, T'}(\mathcal{E}'^{(\bullet)}), \\ (\dagger T', T)^0 \circ \text{oub}_{T, T'}(\mathcal{E}'^{(\bullet)}) &\rightarrow \mathcal{E}'^{(\bullet)} \end{aligned} \quad (3.3.2.1)$$

sont des isomorphismes. Le foncteur  $\text{oub}_{T, T'}: M_{\text{fqc}}(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T')) \rightarrow M_{\text{fqc}}(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  est donc pleinement fidèle.

**3.3.3.** Comme pour 3.1.5.1, on vérifie que le foncteur  $(\dagger T', T)^0$  se factorise en

$$(\dagger T', T)^0: \underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \rightarrow \underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T')). \quad (3.3.3.1)$$

Le foncteur oubli canonique  $M(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T')) \rightarrow M(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  se factorise en le foncteur noté

$$\text{oub}_{T,T'} : \underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T')) \rightarrow \underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)). \quad (3.3.3.2)$$

Il semble faux que le foncteur 3.3.3.2 soit pleinement fidèle sans hypothèse de finitude. Néanmoins, nous verrons que tel est le cas pour les modules cohérents à lim-ind-isogénie près (voir 3.4.5.1).

### 3.4 Théorème de type A

**3.4.1.** Supposons  $\mathcal{P}$  affine.

- On dispose du foncteur section globale  $\Gamma(\mathcal{P}, -) : M(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \rightarrow M(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  défini en posant  $\Gamma(\mathcal{P}, \mathcal{E}^{(\bullet)}) := E^{(\bullet)}$ , où  $E^{(m)} \rightarrow E^{(m+1)}$  est l'image par le foncteur  $\Gamma(\mathcal{P}, -)$  de la flèche  $\mathcal{E}^{(m)} \rightarrow \mathcal{E}^{(m+1)}$ . Comme le foncteur  $\Gamma(\mathcal{P}, -)$  commute canoniquement au foncteur  $\chi^*$ , le foncteur  $\Gamma(\mathcal{P}, -)$  transforme les ind-isogénies en ind-isogénies. Il induit donc le foncteur  $\Gamma(\mathcal{P}, -) : \underline{M}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \rightarrow \underline{M}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . De même, comme  $\Gamma(\mathcal{P}, -)$  envoie une lim-ind-isogénie sur une lim-ind-isogénie, on obtient la factorisation  $\Gamma(\mathcal{P}, -) : \underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \rightarrow \underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ .
- On dispose du foncteur  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T) \otimes_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)} - : M(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \rightarrow M(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . On vérifie de même que l'on obtient la factorisation  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T) \otimes_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)} - : \underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \rightarrow \underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ .

**Lemme 3.4.2.** *Donnons-nous  $\lambda \in L$ ,  $T' \supset T$  un second diviseur.*

- Pour tout  $\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$ -module  $\mathcal{E}^{(\bullet)}$ , les morphismes canoniques  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T') \otimes_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)} \mathcal{E}^{(\bullet)} \rightarrow \lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T') \otimes_{\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)} \mathcal{E}^{(\bullet)}$  et  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T') \hat{\otimes}_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)} \mathcal{E}^{(\bullet)} \rightarrow \lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T') \hat{\otimes}_{\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)} \mathcal{E}^{(\bullet)}$  sont des isomorphismes de  $\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T'))$ .
- Pour tout  $\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$ -module  $F^{(\bullet)}$ , les morphismes canoniques  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T) \otimes_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)} F^{(\bullet)} \rightarrow \lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T) \otimes_{\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)} F^{(\bullet)}$  et  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T) \hat{\otimes}_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)} F^{(\bullet)} \rightarrow \lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T) \hat{\otimes}_{\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)} F^{(\bullet)}$  sont des isomorphismes de  $\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ .

*Démonstration.* On dispose de la factorisation  $\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T') \otimes_{\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)} \mathcal{E}^{(\bullet)} \rightarrow \lambda^* \left( \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T') \otimes_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)} \mathcal{E}^{(\bullet)} \right)$  s'inscrivant dans le diagramme canonique commutatif

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T') \otimes_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)} \mathcal{E}^{(\bullet)} & \xrightarrow{\quad} & \lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T') \otimes_{\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)} \mathcal{E}^{(\bullet)} \\ \downarrow & \nwarrow \text{dotted} & \downarrow \\ \lambda^* \left( \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T') \otimes_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)} \mathcal{E}^{(\bullet)} \right) & \xrightarrow{\quad} & \lambda^* \left( \lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T') \otimes_{\lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)} \mathcal{E}^{(\bullet)} \right), \end{array} \quad (3.4.2.1)$$

et de même en remplaçant «  $\otimes$  » par «  $\hat{\otimes}$  ». On en déduit la première assertion. On procède de manière analogue pour la seconde.  $\square$

**Lemme 3.4.3.** *Soit  $T' \supset T$  un second diviseur.*

1. Le foncteur  $({}^\dagger T', T)^0$  se factorise en

$$({}^\dagger T', T)^0 : \underline{LM}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \rightarrow \underline{LM}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T')). \quad (3.4.3.1)$$

2. Pour tout  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \in \underline{LM}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ , le morphisme canonique  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T') \otimes_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)} \mathcal{E}^{(\bullet)} \rightarrow \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T') \hat{\otimes}_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)} \mathcal{E}^{(\bullet)}$  est un isomorphisme de  $\underline{LM}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T'))$ .



3. Supposons que  $\mathcal{P}$  soit affine. Pour tout  $F^{(\bullet)} \in \underline{LM}_{\mathbb{Q},\text{coh}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ , le morphisme canonique  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T) \otimes_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)} F^{(\bullet)} \rightarrow \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T) \otimes_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)} F^{(\bullet)}$  est alors un isomorphisme de  $\underline{LM}_{\mathbb{Q},\text{coh}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ .

*Démonstration.* D'après le lemme 2.4.5, pour vérifier la préservation de la cohérence, on peut supposer qu'il existe  $m_0, n_0 \in \mathbb{N}$  tels que  $\mathcal{E}^{(\bullet)}$  (resp.  $F^{(\bullet)}$ ) soit un  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet+m_0)}(T)$ -module localement de présentation finie (resp. un  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet+n_0)}(T)$ -module de présentation finie). On obtient ainsi les égalités (à isomorphisme canonique près) :  $\mathcal{E}^{(\bullet)} = \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet+m_0)}(T) \otimes_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(m_0)}(T)} \mathcal{E}^{(m_0)}$  et  $F^{(\bullet)} = \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet+n_0)}(T) \otimes_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(n_0)}(T)} F^{(n_0)}$ . Le lemme 3.4.2 nous permet de conclure.  $\square$

**Proposition 3.4.4.** *Supposons  $\mathcal{P}$  affine. On dispose alors des factorisations canoniques  $\Gamma(\mathcal{P}, -) : \underline{LM}_{\mathbb{Q},\text{coh}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \rightarrow \underline{LM}_{\mathbb{Q},\text{coh}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  et  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T) \otimes_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)} - : \underline{LM}_{\mathbb{Q},\text{coh}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \rightarrow \underline{LM}_{\mathbb{Q},\text{coh}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  qui induisent des équivalences quasi-inverses de catégories.*

*Démonstration.* On procède de manière analogue à la preuve du lemme 3.4.3 en utilisant en plus les théorèmes de type A du deuxième point de la remarque 2.1.9.  $\square$

**3.4.5.** On dispose du diagramme canonique

$$\begin{array}{ccccc} \underline{LM}_{\mathbb{Q},\text{coh}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) & \xrightarrow{\cong} & \underline{LD}_{\mathbb{Q},\text{coh}}^0(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) & \xrightarrow[\mathcal{H}^0]{\cong} & \underline{LM}_{\mathbb{Q},\text{coh}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \\ \downarrow (\dagger T', T)^0 & & \downarrow (\dagger T', T) & & \downarrow (\dagger T', T)^0 \\ \underline{LM}_{\mathbb{Q},\text{coh}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T')) & \xrightarrow{\cong} & \underline{LD}_{\mathbb{Q},\text{coh}}^0(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T')) & \xrightarrow[\mathcal{H}^0]{\cong} & \underline{LM}_{\mathbb{Q},\text{coh}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T')) \\ \downarrow \text{oub}_{T,T'} & & \downarrow \text{oub}_{T,T'} & & \downarrow \text{oub}_{T,T'} \\ \underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T')) & \xrightarrow{\cong} & \underline{LD}_{\mathbb{Q}}^0(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T')) & \xrightarrow[\mathcal{H}^0]{\cong} & \underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T')) \end{array} \quad (3.4.5.1)$$

commutatif à isomorphisme canoniques près. En effet, il suffit de reprendre les arguments de la preuve du lemme 2.5.4. Comme le foncteur oubli  $\text{oub}_{T,T'}$  du milieu est pleinement fidèle (voir 3.2.5), on en déduit qu'il en est de même  $\text{oub}_{T,T'} : \underline{LM}_{\mathbb{Q},\text{coh}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T')) \rightarrow \underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ .

### 3.5 Un critère de stabilité de la cohérence par localisation en dehors d'un diviseur

**Théorème 3.5.1.** *Soient  $T' \supset T$  un diviseur,  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \in \underline{LD}_{\mathbb{Q},\text{coh}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  et  $\mathcal{E} := \varinjlim \mathcal{E}^{(\bullet)} \in D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}})$ . On suppose de plus que le morphisme  $\mathcal{E} \rightarrow (\dagger T', T)(\mathcal{E})$  est un isomorphisme dans  $D^b(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}})$ . Le morphisme canonique  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \rightarrow (\dagger T', T)(\mathcal{E}^{(\bullet)})$  est alors un isomorphisme dans  $\underline{LD}_{\mathbb{Q},\text{coh}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ .*

*Démonstration.* 0) On se ramène au cas où  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \in \underline{LM}_{\mathbb{Q},\text{coh}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ .

Pour tout entier  $n \in \mathbb{Z}$ , d'après le lemme 2.5.1, on a  $\mathcal{H}^n(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \in \underline{LM}_{\mathbb{Q},\text{coh}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . De plus, d'après le corollaire 1.2.12, le morphisme canonique  $\phi : \mathcal{E}^{(\bullet)} \rightarrow (\dagger T', T)(\mathcal{E}^{(\bullet)})$  est un isomorphisme dans  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ , si et seulement si, pour tout entier  $n \in \mathbb{Z}$ , le morphisme  $\mathcal{H}^n(\phi) : \mathcal{H}^n(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \rightarrow \mathcal{H}^n((\dagger T', T)(\mathcal{E}^{(\bullet)}))$  est un isomorphisme de  $\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . Notons  $\psi_n : (\dagger T', T)^0(\mathcal{H}^n(\mathcal{E}^{(\bullet)})) \rightarrow \mathcal{H}^n((\dagger T', T)(\mathcal{E}^{(\bullet)}))$  l'unique morphisme de  $\underline{LM}_{\mathbb{Q},\text{coh}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T'))$  factorisant canoniquement  $\mathcal{H}^n(\phi)$ .

a) Vérifions que  $\psi_n$  est un isomorphisme. Comme le foncteur  $\varinjlim$  est pleinement fidèle sur  $\underline{LM}_{\mathbb{Q},\text{coh}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T'))$ , il suffit de prouver que  $\varinjlim (\psi_n)$  est un isomorphisme. Or, comme le foncteur  $\varinjlim$  commute canoniquement à  $\mathcal{H}^n$  à isomorphisme canonique près (voir le diagramme 2.5.7.2), on obtient que  $\varinjlim (\psi_n)$  est canoniquement isomorphe au morphisme canonique  $(\dagger T', T)(\mathcal{H}^n \mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{H}^n((\dagger T', T)(\mathcal{E}))$ . Comme le foncteur  $(\dagger T', T) : D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}) \rightarrow D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T')_{\mathbb{Q}})$  est exact, le morphisme  $(\dagger T', T)(\mathcal{H}^n \mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{H}^n((\dagger T', T)(\mathcal{E}))$  est donc un isomorphisme. D'où le résultat.

b) Si le théorème est vérifié pour  $\underline{LM}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ , alors le morphisme canonique  $\mathcal{H}^n(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \rightarrow (\dagger T', T)^0(\mathcal{H}^n(\mathcal{E}^{(\bullet)}))$  est un isomorphisme. Comme en le composant avec  $\psi_n$  on obtient  $\mathcal{H}^n(\phi)$ , il en résulte la réduction demandée.

1) Grâce au lemme 2.4.5, on peut supposer qu'il existe  $m_0 \geq 0$  assez grand tel que  $\mathcal{E}^{(\bullet)}$  soit un  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet+m_0)}(T)$ -module localement de présentation finie. Comme le théorème est local (voir 1.3.2), on peut alors supposer  $\mathcal{P}$  affine. Posons  $E^{(\bullet)} = \Gamma(\mathcal{P}, \mathcal{E}^{(\bullet)})$ ,  $\mathcal{F}^{(\bullet)} := (\dagger T', T)^0(\mathcal{E}^{(\bullet)})$ ,  $F^{(\bullet)} = \Gamma(\mathcal{P}, \mathcal{F}^{(\bullet)})$ . Vérifions dans cette étape 1) que le morphisme canonique  $E^{(\bullet)} \rightarrow F^{(\bullet)}$  est un isomorphisme dans  $\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ , i.e., est une lim-ind-isogénie (de  $M(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet+m_0)}(T))$ ).

a) Soient  $E := \varinjlim_m E^{(m)}$  et  $N^{(m)}$  le noyau du morphisme canonique  $E^{(m)} \rightarrow E$ . On déduit des théorèmes de type A (voir par exemple le deuxième point de la remarque 2.1.9) que, pour tout entier  $m \in \mathbb{N}$ ,  $E^{(m)}$  est un  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(m+m_0)}(T)$ -module de type fini. Par noéthérianité de  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(m+m_0)}(T)$ , le  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(m+m_0)}(T)$ -module  $N^{(m)}$  est alors aussi de type fini. On en déduit qu'il existe  $\lambda(m) \geq m$  tel que  $E^{(m)} \rightarrow E^{\lambda(m)}$  se factorise par  $E^{(m)}/N^{(m)} \rightarrow E^{\lambda(m)}$ . On peut choisir  $\lambda: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  tel que  $\lambda \in L$ . On en déduit que  $E^{(\bullet)} \rightarrow E^{(\bullet)}/N^{(\bullet)}$  est en particulier une lim-ind-isogénie. Quitte à remplacer  $E^{(\bullet)}$  par  $E^{(\bullet)}/N^{(\bullet)}$ , on peut donc supposer que les morphismes de transition  $E^{(m)} \rightarrow E^{(m+1)}$  sont injectifs. De même, en utilisant [Ber96b, 3.4.4], on se ramène au cas où les  $E^{(m)}$  sont de plus sans  $p$ -torsion.

De même, posons  $F := \varinjlim_m F^{(m)}$  et, pour tout entier  $m \geq 0$ , soient  $G^{(m)}$  le quotient de  $F^{(m)}$  par le noyau du morphisme canonique  $F^{(m)} \rightarrow F_{\mathbb{Q}}$ . Ainsi, les morphismes de transition  $G^{(m)} \rightarrow G^{(m+1)}$  sont injectifs et les  $G^{(m)}$  sont des  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(m+m_0)}(T')$ -modules de type fini sans  $p$ -torsion. Comme, pour les raisons analogues à ci-dessus, la flèche canonique  $F^{(\bullet)} \rightarrow G^{(\bullet)}$  est une lim-ind-isogénie (de  $M(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet+m_0)}(T'))$  et donc de  $M(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet+m_0)}(T))$ ), on se ramène à établir que le morphisme canonique  $E^{(\bullet)} \rightarrow G^{(\bullet)}$  est une lim-ind-isogénie de  $M(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet+m_0)}(T))$ .

b) Comme le foncteur  $\Gamma(\mathcal{P}, -)$  commute aux limites inductives filtrantes et au foncteur  $- \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ , le fait que le morphisme canonique  $\varinjlim \mathcal{E}^{(\bullet)} \rightarrow \varinjlim \mathcal{F}^{(\bullet)}$  soit un isomorphisme entraîne que le morphisme canonique  $E_{\mathbb{Q}} \rightarrow F_{\mathbb{Q}}$  est un isomorphisme.

c) Les  $K$ -espaces  $E_{\mathbb{Q}}^{(m)}$  et  $G_{\mathbb{Q}}^{(m)}$  sont munis d'une structure canoniques de  $K$ -espaces de Banach induites respectivement par leur structure de  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(m+m_0)}(T)_{\mathbb{Q}}$ -module de type fini et de  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(m+m_0)}(T')_{\mathbb{Q}}$ -module de type fini. Pour ces topologies, les morphismes canoniques  $E_{\mathbb{Q}}^{(m)} \rightarrow G_{\mathbb{Q}}^{(m)}$  sont des morphismes continus de  $K$ -espaces de Banach. Notons  $W := \varinjlim_m G_{\mathbb{Q}}^{(m)}$  muni de la topologie limite inductive de  $K$ -espace localement convexe. Notons  $i_m: E_{\mathbb{Q}}^{(m)} \rightarrow W$  le composé  $E_{\mathbb{Q}}^{(m)} \rightarrow G_{\mathbb{Q}}^{(m)} \rightarrow W$ . Alors  $i_m$  est continu pour les topologies décrites ci-dessus. De plus, comme d'après la partie b) on a  $E_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} F_{\mathbb{Q}}$ , on en déduit que le morphisme  $E_{\mathbb{Q}} \rightarrow W$  est bijectif. Comme  $E_{\mathbb{Q}}^{(m)} \rightarrow E_{\mathbb{Q}}$  est injectif, il en est alors de même de  $i_m$ . De plus, on a l'égalité d'ensembles  $W = \cup_{m \in \mathbb{N}} i_m(E_{\mathbb{Q}}^{(m)})$ . D'après [Sch02, 8.9], pour tout entier  $m$ , il en résulte qu'il existe  $\lambda(m) \geq m$  et un morphisme continu  $\beta^{(m)}: G_{\mathbb{Q}}^{(m)} \rightarrow E_{\mathbb{Q}}^{\lambda(m)}$  tel que en le composant avec  $i_{\lambda(m)}$  on obtienne le morphisme canonique continue  $G_{\mathbb{Q}}^{(m)} \rightarrow W$ . On choisit un tel  $\lambda(m) \geq m$  le plus petit possible. Comme  $i_{\lambda(m)}$  est injective, une telle factorisation  $\beta^{(m)}$  du morphisme canonique  $G_{\mathbb{Q}}^{(m)} \rightarrow W$  est unique. On vérifie de même que les morphismes  $\beta^{(m)}$  sont compatibles aux morphismes de transition, i.e. que l'on obtient en fait le morphisme de  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet+m_0)}(T)_{\mathbb{Q}}$ -modules  $\beta^{(\bullet)}: G_{\mathbb{Q}}^{(\bullet)} \rightarrow \lambda^* E_{\mathbb{Q}}^{(\bullet)}$ .

Comme la famille  $(p^n G^{(m)})_{n \in \mathbb{N}}$  forme une base de voisinage de 0, comme  $E^{(\lambda(m))}$  est un ouvert de  $E_{\mathbb{Q}}^{(\lambda(m))}$ , (on se rappelle que  $E^{(\lambda(m))}$  et  $G^{(m)}$  sont sans  $p$ -torsion), le fait que  $\beta^{(m)}$  soit continue implique alors qu'il existe  $\chi(m) \in \mathbb{N}$  assez grand tel que  $\beta^{(m)}(p^{\chi(m)} G^{(m)}) \subset E^{(\lambda(m))}$ . On peut choisir les  $\chi(m)$  tels que l'application  $\chi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  induite soit croissante. Notons  $\gamma^{(\bullet)}$  le composé de  $\beta^{(\bullet)}: G_{\mathbb{Q}}^{(\bullet)} \rightarrow \lambda^* E_{\mathbb{Q}}^{(\bullet)}$  avec le morphisme canonique  $\lambda^* E_{\mathbb{Q}}^{(\bullet)} \rightarrow \chi^* \lambda^* E_{\mathbb{Q}}^{(\bullet)}$ . D'après ce que l'on vient de voir,  $\gamma^{(\bullet)}$  se factorise alors (de manière unique) en le morphisme de la forme  $g^{(\bullet)}: G^{(\bullet)} \rightarrow \chi^* \lambda^* E^{(\bullet)}$ . Notons  $f^{(\bullet)}: E^{(\bullet)} \rightarrow G^{(\bullet)}$  le morphisme canonique. Comme pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , les morphismes canoniques  $E^{(m)} \rightarrow W$  et  $G^{(m)} \rightarrow W$  sont injectifs, on calcule que  $g^{(\bullet)} \circ f^{(\bullet)}$  et  $\chi^* \lambda^* (f^{(\bullet)}) \circ g^{(\bullet)}$  sont les morphismes canoniques.

2) On déduit de l'étape 1 que le morphisme canonique  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet+m_0)}(T) \hat{\otimes}_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet+m_0)}(T)} E^{(\bullet)} \rightarrow \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet+m_0)}(T) \hat{\otimes}_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet+m_0)}(T)} F^{(\bullet)}$  est une lim-ind-isogénie de  $M(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet+m_0)}(T))$ .

3) Vérifions à présent que le morphisme canonique  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet+m_0)}(T) \hat{\otimes}_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet+m_0)}(T)} F^{(\bullet)} \rightarrow \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet+m_0)}(T') \hat{\otimes}_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet+m_0)}(T')} F^{(\bullet)}$  est un isomorphisme de  $M(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet+m_0)}(T))$ .

Par quasi-cohérence des faisceaux  $\tilde{\mathcal{D}}_{P_i}^{(m)}(T)$  et  $\tilde{\mathcal{D}}_{P_i}^{(m)}(T')$ , le morphisme canonique  $\tilde{\mathcal{D}}_{P_i}^{(m)}(T) \otimes_{\tilde{\mathcal{D}}_{P_i}^{(m)}(T)} \tilde{\mathcal{D}}_{P_i}^{(m)}(T') \rightarrow \tilde{\mathcal{D}}_{P_i}^{(m)}(T')$  est un isomorphisme. On en déduit que le morphisme canonique  $\tilde{\mathcal{D}}_{P_i}^{(m)}(T) \otimes_{\tilde{\mathcal{D}}_{P_i}^{(m)}(T)} F_i^{(m)} \rightarrow \tilde{\mathcal{D}}_{P_i}^{(m)}(T') \otimes_{\tilde{\mathcal{D}}_{P_i}^{(m)}(T')} F_i^{(m)}$  est un isomorphisme. En passant à la limite projective, on en déduit le résultat.

4) Il résulte des étapes 2) et 3) que le morphisme canonique  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet+m_0)}(T) \hat{\otimes}_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet+m_0)}(T)} E^{(\bullet)} \rightarrow \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet+m_0)}(T') \hat{\otimes}_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet+m_0)}(T')} F^{(\bullet)}$  est une lim-ind-isogénie de  $M(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet+m_0)}(T))$ . Il découle alors de la deuxième partie du lemme 3.4.3 (et aussi du lemme 3.4.2) que le morphisme du haut du diagramme canonique commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet+m_0)}(T) \otimes_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet+m_0)}(T)} E^{(\bullet)} & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet+m_0)}(T') \otimes_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet+m_0)}(T')} F^{(\bullet)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{E}^{(\bullet)} & \longrightarrow & \mathcal{F}^{(\bullet)} \end{array}$$

est une lim-ind-isogénie de  $M(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet+m_0)}(T))$ . Or, on déduit des théorèmes de type A du deuxième point de la remarque 2.1.9 que les morphismes verticaux sont des isomorphismes de  $M(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet+m_0)}(T))$ . D'où le théorème.  $\square$

**Corollaire 3.5.2.** Soient  $T' \supset T$  un diviseur,  $\mathcal{E}'^{(\bullet)} \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T'))$  et  $\mathcal{E}' := \varinjlim \mathcal{E}'^{(\bullet)} \in D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T')_{\mathbb{Q}})$ . Si  $\mathcal{E}' \in D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}})$ , alors  $\mathcal{E}'^{(\bullet)} \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ .

*Démonstration.* Comme  $\mathcal{E}' \in D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}})$ , il existe  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  et un isomorphisme  $\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -linéaire de la forme  $\mathcal{E}' \xrightarrow{\sim} \varinjlim \mathcal{E}^{(\bullet)}$ . Or, comme le morphisme canonique  $(\dagger T', T)(\mathcal{E}') \rightarrow \mathcal{E}'$  est un morphisme de  $D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T')_{\mathbb{Q}})$  qui est un isomorphisme en dehors de  $T'$ , il en résulte d'après [Ber96b, 4.3.12] que celui-ci est un isomorphisme. On en déduit que le morphisme canonique  $\mathcal{E}' \rightarrow (\dagger T', T)(\mathcal{E}')$  de  $D^b(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T')_{\mathbb{Q}})$  est un isomorphisme. En appliquant le théorème 3.5.1 à  $\mathcal{E}^{(\bullet)}$ , on en déduit que le morphisme canonique  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \rightarrow (\dagger T', T)(\mathcal{E}^{(\bullet)})$  est alors un isomorphisme dans  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . Comme  $(\dagger T', T)(\mathcal{E}^{(\bullet)})$ ,  $\mathcal{E}'^{(\bullet)} \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T'))$  et comme

$$\varinjlim (\dagger T', T)(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \xrightarrow{\sim} (\dagger T', T)(\varinjlim \mathcal{E}^{(\bullet)}) \xrightarrow{\sim} (\dagger T', T)(\mathcal{E}') \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}' \xrightarrow{\sim} \varinjlim \mathcal{E}'^{(\bullet)},$$

par pleine fidélité du foncteur  $\varinjlim$  sur  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T'))$  on obtient que  $(\dagger T', T)(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}'^{(\bullet)}$ .  $\square$

**Corollaire 3.5.3.** On a  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T) \in \underline{LM}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \cap \underline{LM}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ .

*Démonstration.* On sait déjà que  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T) \in \underline{LM}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . Or, Berthelot a vérifié dans [Ber96a] que  $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}} = \varinjlim \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$  est un  $\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}$ -module cohérent. On conclut grâce au lemme 3.5.2.  $\square$

**Corollaire 3.5.4.** Soient  $T' \supset T$  un diviseur,  $\mathcal{E} \in D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}) \cap D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T')_{\mathbb{Q}})$ . Soient  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  et  $\mathcal{E}'^{(\bullet)} \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T'))$  tels que l'on ait les isomorphismes  $\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -linéaires de la forme  $\varinjlim \mathcal{E}^{(\bullet)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$  et  $\varinjlim \mathcal{E}'^{(\bullet)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$ . Alors  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}'^{(\bullet)}$  dans  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ .

*Démonstration.* Cela découle de 3.5.2 et de la pleine fidélité du foncteur  $\varinjlim$  sur  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ .  $\square$

*Notations 3.5.5.* Soient  $\mathcal{Q}$  un  $\mathcal{V}$ -schéma formel lisse,  $U$  un diviseur de  $\mathcal{Q}$  et  $\phi^{(\bullet)}: \underline{LD}_{\mathcal{Q},qc}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \rightarrow \underline{LD}_{\mathcal{Q},qc}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{Q}}^{(\bullet)}(U))$  un foncteur. On en déduit un foncteur  $\text{Coh}_T(\phi^{(\bullet)}): D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathcal{Q}}) \rightarrow D^b(\mathcal{D}_{\mathcal{Q}}^{\dagger}(\dagger U)_{\mathcal{Q}})$  en posant  $\text{Coh}_T(\phi^{(\bullet)}) := \varinjlim \circ \phi^{(\bullet)} \circ (\varinjlim_T)^{-1}$ , où  $(\varinjlim_T)^{-1}$  désigne un foncteur quasi-inverse de l'équivalence de catégories de

$$\varinjlim: \underline{LD}_{\mathcal{Q},\text{coh}}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \xrightarrow{2.5.5.1} D_{\text{coh}}^b(\underline{LM}_{\mathcal{Q}}(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))) \xrightarrow{2.4.4.3} D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathcal{Q}}). \quad (3.5.5.1)$$

*Remarques 3.5.6.* Soit  $T \subset T'$  un second diviseur. Lorsque  $\mathcal{E} \in D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T')_{\mathcal{Q}}) \cap D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathcal{Q}})$ , grâce au corollaire 3.5.4, les objets de  $\underline{LD}_{\mathcal{Q},\text{coh}}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  et  $\underline{LD}_{\mathcal{Q},\text{coh}}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T'))$  correspondant via les équivalences de catégories respectives de 2.5.5.1 soient isomorphes. Avec les notations de 3.5.5, les foncteurs  $\text{Coh}_T(\phi^{(\bullet)})$  et  $\text{Coh}_{T'}(\phi^{(\bullet)})$  sont donc isomorphes sur  $D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T')_{\mathcal{Q}}) \cap D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathcal{Q}})$ .

Terminons la section par d'autres applications du théorème.

**Proposition 3.5.7.** *Soient  $T \subset D \subset T'$  des diviseurs de  $P$ .*

1. *Soit  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \in \underline{LD}_{\mathcal{Q},\text{coh}}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \cap \underline{LD}_{\mathcal{Q},\text{coh}}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T'))$ . Alors  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \in \underline{LD}_{\mathcal{Q},\text{coh}}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(D))$ .*
2. *Soit  $\mathcal{E} \in D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathcal{Q}}) \cap D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T')_{\mathcal{Q}})$ . Alors  $\mathcal{E} \in D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger D)_{\mathcal{Q}})$ .*

*Démonstration.* Il découle de 3.2.5.1 que le morphisme canonique  $(\dagger D, T) \circ \text{oub}_{T,D}(\text{oub}_{D,T'}(\mathcal{E}^{(\bullet)})) \rightarrow \text{oub}_{D,T'}(\mathcal{E}^{(\bullet)})$  de  $\underline{LD}_{\mathcal{Q},qc}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(D))$  est un isomorphisme. D'où la première assertion. Grâce à 3.5.2, la seconde assertion découle de la première.  $\square$

*Notations 3.5.8.* • Soient  $D \subset T \subset T'$  des diviseurs de  $P$ . D'après 3.2.6, en omettant d'indiquer les foncteurs oublis respectifs, les foncteur  $(\dagger T', D)$  et  $(\dagger T', T)$  sont canoniquement isomorphes sur  $\underline{LD}_{\mathcal{Q},qc}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . On pourra donc les noter sans risque  $(\dagger T')$ .

- Pour tous diviseurs  $D \subset T$ , on dispose de l'isomorphisme de foncteurs  $\text{Coh}_D((\dagger T', D)) \xrightarrow{\sim} (\dagger T', D)$ , le dernier foncteur étant celui défini en 3.2.4.3. Les notations respectives sont donc compatibles.
- Soient  $T$  et  $D \subset D'$  des diviseurs de  $P$ . Grâce à 3.2.8 et 3.2.5, les foncteurs  $(\dagger T)$  et  $(\dagger T \cup D)$  sont canoniquement isomorphes sur  $\underline{LD}_{\mathcal{Q}}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(D))$ . On dispose alors du foncteur  $(\dagger T') := \text{Coh}_D((\dagger T)): D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger D)_{\mathcal{Q}}) \rightarrow D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T \cup D)_{\mathcal{Q}})$ . Avec la remarque 3.5.6, comme les foncteurs  $\text{Coh}_D((\dagger T))$  et  $\text{Coh}_{D'}((\dagger T))$  sont isomorphes sur  $D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger D)_{\mathcal{Q}}) \cap D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathcal{Q}})$ , il n'est donc pas nécessaire de préciser  $D$ .

## 4 Rappels et compléments sur le foncteur cohomologique local à support strict dans un fermé et sur le foncteur de localisation en dehors d'un fermé

### 4.1 Triangle distingué de localisation relativement à un diviseur

**4.1.1** (Triangle distingué de localisation). Soit  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \in \underline{LD}_{\mathcal{Q},qc}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)})$ . Berthelot a défini le foncteur cohomologique local à support strict dans  $T$  noté  $\mathbb{R}\Gamma_T^{\dagger}: \underline{LD}_{\mathcal{Q},qc}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}) \rightarrow \underline{LD}_{\mathcal{Q},qc}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)})$ . De plus, il a vérifié le triangle distingué de localisation

$$\mathbb{R}\Gamma_T^{\dagger}(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \rightarrow \mathcal{E}^{(\bullet)} \rightarrow (\dagger T)(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \rightarrow \mathbb{R}\Gamma_T^{\dagger}(\mathcal{E}^{(\bullet)})[1]. \quad (4.1.1.1)$$

On pourra désigner par la suite le triangle distingué 4.1.1.1 par  $\Delta_T(\mathcal{E}^{(\bullet)})$ . On peut étendre ce triangle au cas où  $T = P$  de la manière suivante :  $\mathbb{R}\Gamma_T^{\dagger}(\mathcal{E}^{(\bullet)}) = \mathcal{E}^{(\bullet)}$  et  $(\dagger T)(\mathcal{E}^{(\bullet)}) = 0$ . Ce dernier est fonctoriel en  $T$  et  $\mathcal{E}^{(\bullet)}$ , i.e. si  $T \subset T'$  avec  $T'$  un diviseur ou  $T' = P$  et si  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \rightarrow \mathcal{E}'^{(\bullet)}$  est un morphisme de  $\underline{LD}_{\mathcal{Q},qc}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)})$  on bénéficie du morphisme canonique de triangles distingués de la forme  $\Delta_T(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \rightarrow \Delta_{T'}(\mathcal{E}'^{(\bullet)})$

En fait, d'après ce qui suit, le foncteur  $\mathbb{R}\Gamma_T^{\dagger}$  est canoniquement déterminé à partir du foncteur  $(\dagger T)$  et du triangle distingué 4.1.1.1. On pourrait donc le prendre comme définition.

**Lemme 4.1.2.** Soient  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \in \underline{LD}_{\mathbb{Q},qc}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)})$  et  $\mathcal{F}^{(\bullet)} \in \underline{LD}_{\mathbb{Q},qc}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . On suppose de plus que l'on dispose dans  $\underline{LD}_{\mathbb{Q},qc}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)})$  de l'isomorphisme  $(\dagger T)(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \xrightarrow{\sim} 0$ . Alors  $\text{Hom}_{\underline{LD}_{\mathbb{Q}}(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)})}(\mathcal{E}^{(\bullet)}, \mathcal{F}^{(\bullet)}) = 0$ .

*Démonstration.* Soit  $\phi: \mathcal{E}^{(\bullet)} \rightarrow \mathcal{F}^{(\bullet)}$  un morphisme de  $\underline{LD}_{\mathbb{Q},qc}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . Comme le morphisme canonique  $\mathcal{F}^{(\bullet)} \rightarrow (\dagger T)(\mathcal{F}^{(\bullet)})$  est un isomorphisme, le morphisme  $\phi$  se factorise canoniquement par  $(\dagger T)(\phi)$ . Or, comme  $(\dagger T)(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \xrightarrow{\sim} 0$ , alors  $(\dagger T)(\phi) = 0$ . On en déduit que  $\phi = 0$ . D'où le résultat.  $\square$

**Lemme 4.1.3.** Soit un triangle distingué dans  $\underline{LD}_{\mathbb{Q},qc}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)})$  de la forme

$$\mathcal{F}^{(\bullet)} \rightarrow \mathcal{E}^{(\bullet)} \rightarrow (\dagger T)(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \rightarrow \mathcal{F}^{(\bullet)}[1], \quad (4.1.3.1)$$

où le second morphisme est le morphisme canonique. Pour tout diviseur  $T \subset T'$ , on dispose alors de l'isomorphisme dans  $\underline{LD}_{\mathbb{Q},qc}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)})$  de la forme  $(\dagger T')(\mathcal{F}^{(\bullet)}) \xrightarrow{\sim} 0$ .

*Démonstration.* Comme d'après 3.2.8 le morphisme canonique  $(\dagger T')(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \rightarrow (\dagger T')((\dagger T)(\mathcal{E}^{(\bullet)}))$  est un isomorphisme, en appliquant le foncteur  $(\dagger T')$  au triangle distingué 4.1.3.1, l'un des axiomes sur les catégories triangulées nous permet de conclure.  $\square$

**4.1.4** (Une définition alternative équivalente du foncteur cohomologique local à support strict dans un diviseur). Soit  $T \subset T'$  un second diviseur. Supposons donné le diagramme commutatif dans  $\underline{LD}_{\mathbb{Q},qc}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)})$  de la forme

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{F}^{(\bullet)} & \longrightarrow & \mathcal{E}^{(\bullet)} & \longrightarrow & (\dagger T)(\mathcal{E}^{(\bullet)}) & \longrightarrow & \mathcal{F}^{(\bullet)}[1] \\ & & \downarrow \phi & & \downarrow (\dagger T)(\phi) & & \\ \mathcal{F}'^{(\bullet)} & \longrightarrow & \mathcal{E}'^{(\bullet)} & \longrightarrow & (\dagger T)(\mathcal{E}'^{(\bullet)}) & \longrightarrow & \mathcal{F}'^{(\bullet)}[1] \end{array} \quad (4.1.4.1)$$

dont les flèches horizontales du milieu sont les morphismes canoniques et dont les deux triangles horizontaux sont distingués. D'après les lemmes 4.1.2 et 4.1.3, on obtient alors

$$H^{-1}(\mathbb{R}\text{Hom}_{D(\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)))}(\mathcal{F}^{(\bullet)}, (\dagger T)(\mathcal{E}'^{(\bullet)}))) \xrightarrow[1.4.8.1]{\sim} \text{Hom}_{D(\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)))}(\mathcal{F}^{(\bullet)}, (\dagger T)(\mathcal{E}'^{(\bullet)})[-1]) = 0.$$

On en déduit, grâce à [BBD82, 1.1.9], qu'il existe donc un unique morphisme  $\mathcal{F}^{(\bullet)} \rightarrow \mathcal{F}'^{(\bullet)}$  induisant dans  $\underline{LD}_{\mathbb{Q},qc}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)})$  le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{F}^{(\bullet)} & \longrightarrow & \mathcal{E}^{(\bullet)} & \longrightarrow & (\dagger T)(\mathcal{E}^{(\bullet)}) & \longrightarrow & \mathcal{F}^{(\bullet)}[1] \\ \downarrow \exists! & & \downarrow \phi & & \downarrow (\dagger T)(\phi) & & \downarrow \exists! \\ \mathcal{F}'^{(\bullet)} & \longrightarrow & \mathcal{E}'^{(\bullet)} & \longrightarrow & (\dagger T)(\mathcal{E}'^{(\bullet)}) & \longrightarrow & \mathcal{F}'^{(\bullet)}[1]. \end{array} \quad (4.1.4.2)$$

Comme pour [BBD82, 1.1.10], cela implique que le cône de  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \rightarrow (\dagger T)(\mathcal{E}^{(\bullet)})$  est unique à isomorphisme canonique près. Un tel complexe  $\mathcal{F}^{(\bullet)}$  est donc unique à isomorphisme unique près et se notera alors  $\mathbb{R}\underline{\Gamma}_T^{\dagger}(\mathcal{E}^{(\bullet)})$ . En considérant le diagramme 4.1.4.2, la formation du complexe  $\mathbb{R}\underline{\Gamma}_T^{\dagger}(\mathcal{E}^{(\bullet)})$  est fonctoriel en  $\mathcal{E}^{(\bullet)}$ .

On dispose aussi du morphisme fonctoriel en  $\mathcal{E}^{(\bullet)}$  de forme  $\mathbb{R}\underline{\Gamma}_T^{\dagger}(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \rightarrow \mathcal{E}^{(\bullet)}$ . De la même manière, en utilisant les lemmes 4.1.2 et 4.1.3 et la proposition [BBD82, 1.1.9], on vérifie qu'il existe une unique flèche  $\mathbb{R}\underline{\Gamma}_T^{\dagger}(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \rightarrow \mathbb{R}\underline{\Gamma}_{T'}^{\dagger}(\mathcal{E}^{(\bullet)})$  induisant le diagramme canonique

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R}\underline{\Gamma}_T^{\dagger}(\mathcal{E}^{(\bullet)}) & \longrightarrow & \mathcal{E}^{(\bullet)} & \longrightarrow & (\dagger T)(\mathcal{E}^{(\bullet)}) & \longrightarrow & \mathbb{R}\underline{\Gamma}_T^{\dagger}(\mathcal{E}^{(\bullet)})[1] \\ \downarrow \exists! & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \exists! \\ \mathbb{R}\underline{\Gamma}_{T'}^{\dagger}(\mathcal{E}^{(\bullet)}) & \longrightarrow & \mathcal{E}^{(\bullet)} & \longrightarrow & (\dagger T')(\mathcal{E}^{(\bullet)}) & \longrightarrow & \mathbb{R}\underline{\Gamma}_{T'}^{\dagger}(\mathcal{E}^{(\bullet)})[1] \end{array} \quad (4.1.4.3)$$

commutatif. Ces propriétés sont synthétisées en disant que le complexe  $\mathbb{R}\underline{\Gamma}_T^{\dagger}(\mathcal{E}^{(\bullet)})$  est fonctoriel en  $T$ .

*Remarques 4.1.5.* Soit  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)})$ . Si  $T$  est vide et si  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \in \underline{LD}_{\mathbb{Q},qc}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)})$ , alors le morphisme canonique  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \rightarrow (\dagger 0)(\mathcal{E}^{(\bullet)})$  est un isomorphisme. Cela n'est plus forcément le cas sans l'hypothèse de quasi-cohérence de  $\mathcal{E}^{(\bullet)}$ . On pourrait sûrement construire le foncteur cohomologique local  $\mathbb{R}\Gamma_T^{\dagger} : \underline{LD}_{\mathbb{Q}}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}) \rightarrow \underline{LD}_{\mathbb{Q}}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)})$  comme ci-dessus, cependant on se restreindra exclusivement aux complexes au moins quasi-cohérents pour éviter cette pathologie.

## 4.2 Commutations et compatibilités des foncteurs locaux et de localisation dans le cas d'un diviseur

**4.2.1** (Commutation des foncteurs locaux et de localisation au produit tensoriel). Soient  $\mathcal{E}^{(\bullet)}, \mathcal{F}^{(\bullet)} \in \underline{LD}_{\mathbb{Q},qc}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)})$ . Comme le foncteur  $(\dagger T)$  commute canoniquement au produit tensoriel, il existe alors un unique isomorphisme de la forme  $\mathbb{R}\Gamma_T^{\dagger}(\mathcal{E}^{(\bullet)} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}} \mathcal{F}^{(\bullet)}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma_T^{\dagger}(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}} \mathcal{F}^{(\bullet)}$  (resp.  $\mathbb{R}\Gamma_T^{\dagger}(\mathcal{E}^{(\bullet)} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}} \mathcal{F}^{(\bullet)}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}^{(\bullet)} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}} \mathbb{R}\Gamma_T^{\dagger}(\mathcal{F}^{(\bullet)})$ ) et s'inscrivant dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R}\Gamma_T^{\dagger}(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}} \mathcal{F}^{(\bullet)} & \rightarrow & \mathcal{E}^{(\bullet)} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}} \mathcal{F}^{(\bullet)} & \rightarrow & (\dagger T)(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}} \mathcal{F}^{(\bullet)} & \rightarrow & \mathbb{R}\Gamma_T^{\dagger}(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}} \mathcal{F}^{(\bullet)}[1] \\ \uparrow \exists! & & \parallel & & \sim \uparrow & & \uparrow \exists! \\ \mathbb{R}\Gamma_T^{\dagger}(\mathcal{E}^{(\bullet)} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}} \mathcal{F}^{(\bullet)}) & \rightarrow & \mathcal{E}^{(\bullet)} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}} \mathcal{F}^{(\bullet)} & \rightarrow & (\dagger T)(\mathcal{E}^{(\bullet)} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}} \mathcal{F}^{(\bullet)}) & \rightarrow & \mathbb{R}\Gamma_T^{\dagger}(\mathcal{E}^{(\bullet)} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}} \mathcal{F}^{(\bullet)})[1] \\ \downarrow \exists! & & \parallel & & \downarrow \sim & & \downarrow \exists! \\ \mathcal{E}^{(\bullet)} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}} \mathbb{R}\Gamma_T^{\dagger}(\mathcal{F}^{(\bullet)}) & \rightarrow & \mathcal{E}^{(\bullet)} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}} \mathcal{F}^{(\bullet)} & \rightarrow & \mathcal{E}^{(\bullet)} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}} (\dagger T)(\mathcal{F}^{(\bullet)}) & \rightarrow & \mathcal{E}^{(\bullet)} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}} \mathbb{R}\Gamma_T^{\dagger}(\mathcal{F}^{(\bullet)})[1]. \end{array} \quad (4.2.1.1)$$

Ces isomorphismes sont fonctoriel en  $\mathcal{E}^{(\bullet)}, \mathcal{F}^{(\bullet)}, T$  (pour la signification de la fonctorialité en  $T$ , on pourra par exemple regarder 4.1.4.3). Pour vérifier la fonctorialité en  $\mathcal{E}^{(\bullet)}, \mathcal{F}^{(\bullet)}, T$ , il s'agit d'écrire les diagramme correspondants en trois dimensions, ce qui est laissé au lecteur.

**4.2.2** (Commutation des foncteurs locaux et de localisation entre eux). Soient  $T_1, T_2$  des diviseurs de  $P$ ,  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \in \underline{LD}_{\mathbb{Q},qc}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)})$ .

• Par commutativité du produit tensoriel, on dispose alors de l'isomorphisme canonique

$$(\dagger T_2) \circ (\dagger T_1)(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \xrightarrow{\sim} (\dagger T_1) \circ (\dagger T_2)(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \quad (4.2.2.1)$$

fonctoriel en  $T_1, T_2$  et  $\mathcal{E}^{(\bullet)}$ .

• Il existe alors un unique isomorphisme  $(\dagger T_2) \circ \mathbb{R}\Gamma_{T_1}^{\dagger}(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma_{T_1}^{\dagger} \circ (\dagger T_2)(\mathcal{E}^{(\bullet)})$  induisant le morphisme canonique de triangles distingués  $(\dagger T_2)(\Delta_{T_1}(\mathcal{E}^{(\bullet)})) \rightarrow \Delta_{T_1}((\dagger T_2)(\mathcal{E}^{(\bullet)}))$ , i.e. de la forme :

$$\begin{array}{ccccccc} (\dagger T_2) \circ \mathbb{R}\Gamma_{T_1}^{\dagger}(\mathcal{E}^{(\bullet)}) & \rightarrow & (\dagger T_2)(\mathcal{E}^{(\bullet)}) & \rightarrow & (\dagger T_2) \circ (\dagger T_1)(\mathcal{E}^{(\bullet)}) & \rightarrow & (\dagger T_2) \circ \mathbb{R}\Gamma_{T_1}^{\dagger}(\mathcal{E}^{(\bullet)})[1] \\ \downarrow \exists! & & \parallel & & \downarrow \sim & & \downarrow \exists! \\ \mathbb{R}\Gamma_{T_1}^{\dagger} \circ (\dagger T_2)(\mathcal{E}^{(\bullet)}) & \rightarrow & (\dagger T_2)(\mathcal{E}^{(\bullet)}) & \rightarrow & (\dagger T_1) \circ (\dagger T_2)(\mathcal{E}^{(\bullet)}) & \rightarrow & \mathbb{R}\Gamma_{T_1}^{\dagger} \circ (\dagger T_2)(\mathcal{E}^{(\bullet)})[1], \end{array} \quad (4.2.2.2)$$

dont le carré du milieu est bien commutatif par fonctorialité en  $T_1$  de l'isomorphisme 4.2.2.1. En écrivant les diagrammes en trois dimensions (i.e., on écrit le parallélépipède dont la face de devant est 4.2.2.2, la face de derrière est 4.2.2.2 avec  $T'_1$  remplaçant  $T_1$ , les morphismes de l'avant vers l'arrière sont les morphismes de fonctorialité induit par  $T_1 \subset T'_1$ ; idem pour valider la fonctorialité en  $T_2$  ou  $\mathcal{E}^{(\bullet)}$ ), on vérifie que l'isomorphisme  $(\dagger T_2) \circ \mathbb{R}\Gamma_{T_1}^{\dagger}(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma_{T_1}^{\dagger} \circ (\dagger T_2)(\mathcal{E}^{(\bullet)})$  est fonctoriel en  $T_1, T_2, \mathcal{E}^{(\bullet)}$ .

• De même, il existe alors un unique isomorphisme  $\mathbb{R}\Gamma_{T_2}^{\dagger} \circ \mathbb{R}\Gamma_{T_1}^{\dagger}(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma_{T_1}^{\dagger} \circ \mathbb{R}\Gamma_{T_2}^{\dagger}(\mathcal{E}^{(\bullet)})$  fonctoriel en  $T_1, T_2, \mathcal{E}^{(\bullet)}$  induisant le morphisme canonique de triangles distingués  $\Delta_{T_2}(\mathbb{R}\Gamma_{T_1}^{\dagger}(\mathcal{E}^{(\bullet)})) \rightarrow \mathbb{R}\Gamma_{T_1}^{\dagger}(\Delta_{T_2}(\mathcal{E}^{(\bullet)}))$ , i.e. de la forme :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R}\Gamma_{T_2}^{\dagger} \circ \mathbb{R}\Gamma_{T_1}^{\dagger}(\mathcal{E}^{(\bullet)}) & \rightarrow & \mathbb{R}\Gamma_{T_1}^{\dagger}(\mathcal{E}^{(\bullet)}) & \rightarrow & (\dagger T_2) \circ \mathbb{R}\Gamma_{T_1}^{\dagger}(\mathcal{E}^{(\bullet)}) & \rightarrow & \mathbb{R}\Gamma_{T_2}^{\dagger} \circ \mathbb{R}\Gamma_{T_1}^{\dagger}(\mathcal{E}^{(\bullet)})[1] \\ \downarrow \exists! & & \parallel & & \downarrow \sim & & \downarrow \exists! \\ \mathbb{R}\Gamma_{T_1}^{\dagger} \circ \mathbb{R}\Gamma_{T_2}^{\dagger}(\mathcal{E}^{(\bullet)}) & \rightarrow & \mathbb{R}\Gamma_{T_1}^{\dagger}(\mathcal{E}^{(\bullet)}) & \rightarrow & \mathbb{R}\Gamma_{T_1}^{\dagger} \circ (\dagger T_2)(\mathcal{E}^{(\bullet)}) & \rightarrow & (\dagger T_1) \circ \mathbb{R}\Gamma_{T_2}^{\dagger}(\mathcal{E}^{(\bullet)})[1], \end{array} \quad (4.2.2.3)$$

dont le carré du milieu est bien commutatif par functorialité en  $T_2$  de l'isomorphisme  $(^\dagger T_2) \circ \mathbb{R}\Gamma_{T_1}^\dagger(\mathcal{E}^\bullet) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma_{T_1}^\dagger \circ (^\dagger T_2)(\mathcal{E}^\bullet)$ .

**4.2.3** (Compatibilité des isomorphismes de commutation au produit tensoriel). Soient  $T, T_1, T_2$  des diviseurs de  $P$ ,  $\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{F}^\bullet \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{qc}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_P^\bullet)$ . En composant les isomorphismes verticaux du diagramme 4.2.1.1, on obtient les isomorphismes canoniques  $(^\dagger T)(\mathcal{E}^\bullet) \otimes_{\mathcal{O}_{P, \mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}^\dagger} \mathcal{F}^\bullet \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}^\bullet \otimes_{\mathcal{O}_{P, \mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}^\dagger} (^\dagger T)(\mathcal{F}^\bullet)$  et  $\mathbb{R}\Gamma_T^\dagger(\mathcal{E}^\bullet) \otimes_{\mathcal{O}_{P, \mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}^\dagger} \mathcal{F}^\bullet \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}^\bullet \otimes_{\mathcal{O}_{P, \mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}^\dagger} \mathbb{R}\Gamma_T^\dagger(\mathcal{F}^\bullet)$  fonctoriels en  $T, \mathcal{E}^\bullet, \mathcal{F}^\bullet$ . Nous vérifions dans ce paragraphe que ces isomorphismes sont compatibles avec les trois isomorphismes de commutation des foncteurs locaux et de localisation de 4.2.2.

• La compatibilité avec les isomorphismes 4.2.2.1 signifie que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} (^\dagger T_2) \circ (^\dagger T_1)(\mathcal{E}^\bullet) \otimes_{\mathcal{O}_{P, \mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}^\dagger} \mathcal{F}^\bullet & \xrightarrow{\sim} & (^\dagger T_1)(\mathcal{E}^\bullet) \otimes_{\mathcal{O}_{P, \mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}^\dagger} (^\dagger T_2)(\mathcal{F}^\bullet) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}^\bullet \otimes_{\mathcal{O}_{P, \mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}^\dagger} (^\dagger T_1) \circ (^\dagger T_2)(\mathcal{F}^\bullet) \\ \text{4.2.2.1} \downarrow \sim & & \sim \uparrow \text{4.2.2.1} \\ (^\dagger T_1) \circ (^\dagger T_2)(\mathcal{E}^\bullet) \otimes_{\mathcal{O}_{P, \mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}^\dagger} \mathcal{F}^\bullet & \xrightarrow{\sim} & (^\dagger T_2)(\mathcal{E}^\bullet) \otimes_{\mathcal{O}_{P, \mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}^\dagger} (^\dagger T_1)(\mathcal{F}^\bullet) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}^\bullet \otimes_{\mathcal{O}_{P, \mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}^\dagger} (^\dagger T_2) \circ (^\dagger T_1)(\mathcal{F}^\bullet), \end{array} \quad (4.2.3.1)$$

est commutatif, ce qui est aisé.

• Vérifions à présent que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} (^\dagger T_2) \circ \mathbb{R}\Gamma_{T_1}^\dagger(\mathcal{E}^\bullet) \otimes_{\mathcal{O}_{P, \mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}^\dagger} \mathcal{F}^\bullet & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{R}\Gamma_{T_1}^\dagger(\mathcal{E}^\bullet) \otimes_{\mathcal{O}_{P, \mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}^\dagger} (^\dagger T_2)(\mathcal{F}^\bullet) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}^\bullet \otimes_{\mathcal{O}_{P, \mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}^\dagger} \mathbb{R}\Gamma_{T_1}^\dagger \circ (^\dagger T_2)(\mathcal{F}^\bullet) \\ \downarrow \sim & & \sim \uparrow \\ \mathbb{R}\Gamma_{T_1}^\dagger \circ (^\dagger T_2)(\mathcal{E}^\bullet) \otimes_{\mathcal{O}_{P, \mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}^\dagger} \mathcal{F}^\bullet & \xrightarrow{\sim} & (^\dagger T_2)(\mathcal{E}^\bullet) \otimes_{\mathcal{O}_{P, \mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}^\dagger} \mathbb{R}\Gamma_{T_1}^\dagger(\mathcal{F}^\bullet) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}^\bullet \otimes_{\mathcal{O}_{P, \mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}^\dagger} (^\dagger T_2) \circ \mathbb{R}\Gamma_{T_1}^\dagger(\mathcal{F}^\bullet), \end{array} \quad (4.2.3.2)$$

est commutatif. Pour cela considérons le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} (^\dagger T_2) \circ \mathbb{R}\Gamma_{T_1}^\dagger(\mathcal{E}^\bullet) \otimes_{\mathcal{O}_{P, \mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}^\dagger} \mathcal{F}^\bullet & \xrightarrow{\sim} & (^\dagger T_2)(\mathcal{E}^\bullet) \otimes_{\mathcal{O}_{P, \mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}^\dagger} \mathcal{F}^\bullet \xrightarrow{\sim} (^\dagger T_2) \circ (^\dagger T_1)(\mathcal{E}^\bullet) \otimes_{\mathcal{O}_{P, \mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}^\dagger} \mathcal{F}^\bullet \rightarrow +1 \\ \downarrow & & \downarrow \sim \\ \mathcal{E}^\bullet \otimes_{\mathcal{O}_{P, \mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}^\dagger} \mathbb{R}\Gamma_{T_1}^\dagger \circ (^\dagger T_2)(\mathcal{F}^\bullet) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{E}^\bullet \otimes_{\mathcal{O}_{P, \mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}^\dagger} (^\dagger T_2)(\mathcal{F}^\bullet) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}^\bullet \otimes_{\mathcal{O}_{P, \mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}^\dagger} (^\dagger T_1) \circ (^\dagger T_2)(\mathcal{F}^\bullet) \rightarrow +1, \end{array} \quad (4.2.3.3)$$

dont la flèche verticale de droite (resp. de gauche) est le composé du haut de 4.2.3.2 (resp. 4.2.3.1). Comme ces morphismes sont fonctoriels en  $T_1$ , le carré de gauche (resp de droite) du diagramme 4.2.3.3 est commutatif. Ce diagramme 4.2.3.3 correspond donc à un morphisme de triangles distingués de la forme  $(^\dagger T_2)(\Delta_{T_1}(\mathcal{E}^\bullet)) \otimes_{\mathcal{O}_{P, \mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}^\dagger} \mathcal{F}^\bullet \rightarrow \mathcal{E}^\bullet \otimes_{\mathcal{O}_{P, \mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}^\dagger} \Delta_{T_1}((^\dagger T_2)(\mathcal{E}^\bullet))$ . De la même manière, on vérifie la commutativité des carrés du milieu du diagramme

$$\begin{array}{ccc} (^\dagger T_2) \circ \mathbb{R}\Gamma_{T_1}^\dagger(\mathcal{E}^\bullet) \otimes_{\mathcal{O}_{P, \mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}^\dagger} \mathcal{F}^\bullet & \xrightarrow{\sim} & (^\dagger T_2)(\mathcal{E}^\bullet) \otimes_{\mathcal{O}_{P, \mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}^\dagger} \mathcal{F}^\bullet \xrightarrow{\sim} (^\dagger T_2) \circ (^\dagger T_1)(\mathcal{E}^\bullet) \otimes_{\mathcal{O}_{P, \mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}^\dagger} \mathcal{F}^\bullet \rightarrow +1 \\ \downarrow & \parallel & \downarrow \sim \\ \mathbb{R}\Gamma_{T_1}^\dagger \circ (^\dagger T_2)(\mathcal{E}^\bullet) \otimes_{\mathcal{O}_{P, \mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}^\dagger} \mathcal{F}^\bullet & \xrightarrow{\sim} & (^\dagger T_2)(\mathcal{E}^\bullet) \otimes_{\mathcal{O}_{P, \mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}^\dagger} \mathcal{F}^\bullet \xrightarrow{\sim} (^\dagger T_1) \circ (^\dagger T_2)(\mathcal{E}^\bullet) \otimes_{\mathcal{O}_{P, \mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}^\dagger} \mathcal{F}^\bullet \rightarrow +1 \\ \downarrow & \parallel & \downarrow \\ \mathcal{E}^\bullet \otimes_{\mathcal{O}_{P, \mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}^\dagger} (^\dagger T_2) \circ \mathbb{R}\Gamma_{T_1}^\dagger(\mathcal{F}^\bullet) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{E}^\bullet \otimes_{\mathcal{O}_{P, \mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}^\dagger} (^\dagger T_2)(\mathcal{F}^\bullet) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}^\bullet \otimes_{\mathcal{O}_{P, \mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}^\dagger} (^\dagger T_2) \circ (^\dagger T_1)(\mathcal{F}^\bullet) \rightarrow +1 \\ \downarrow & \parallel & \downarrow \\ \mathcal{E}^\bullet \otimes_{\mathcal{O}_{P, \mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}^\dagger} \mathbb{R}\Gamma_{T_1}^\dagger \circ (^\dagger T_2)(\mathcal{F}^\bullet) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{E}^\bullet \otimes_{\mathcal{O}_{P, \mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}^\dagger} (^\dagger T_2)(\mathcal{F}^\bullet) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}^\bullet \otimes_{\mathcal{O}_{P, \mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}^\dagger} (^\dagger T_1) \circ (^\dagger T_2)(\mathcal{F}^\bullet) \rightarrow +1, \end{array} \quad (4.2.3.4)$$

dont le morphisme de triangle du haut (resp. du bas) est l'image par le foncteur  $-\otimes_{\mathcal{O}_{P, \mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}^\dagger} \mathcal{F}^\bullet$  (resp.  $\mathcal{E}^\bullet \otimes_{\mathcal{O}_{P, \mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}^\dagger} -$ ) du morphisme de triangles distingués 4.2.2.2. La commutativité du diagramme 4.2.3.1 signifie que la flèche composée verticale de droite (resp. du milieu) du diagramme 4.2.3.4 est la flèche verticale de droite (resp. du milieu) de 4.2.3.3. Par unicité (grâce à [BBD82, 1.1.9]), il en est de même des flèches verticales de gauche. D'où le résultat.

• En calquant la preuve de la commutativité de 4.2.3.2 à partir de 4.2.3.1, on vérifie à partir de la commutativité de 4.2.3.2 celle du diagramme ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{R}\Gamma_{T_2}^\dagger \circ \mathbb{R}\Gamma_{T_1}^\dagger (\mathcal{E}(\bullet)) \otimes_{\mathcal{O}_{P,Q}}^{\mathbb{L}} \mathcal{F}(\bullet) & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{R}\Gamma_{T_1}^\dagger (\mathcal{E}(\bullet)) \otimes_{\mathcal{O}_{P,Q}}^{\mathbb{L}} \mathbb{R}\Gamma_{T_2}^\dagger (\mathcal{F}(\bullet)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}(\bullet) \otimes_{\mathcal{O}_{P,Q}}^{\mathbb{L}} \mathbb{R}\Gamma_{T_1}^\dagger \circ \mathbb{R}\Gamma_{T_2}^\dagger (\mathcal{F}(\bullet)) \\
\downarrow \sim & & \sim \uparrow \\
\mathbb{R}\Gamma_{T_1}^\dagger \circ \mathbb{R}\Gamma_{T_2}^\dagger (\mathcal{E}(\bullet)) \otimes_{\mathcal{O}_{P,Q}}^{\mathbb{L}} \mathcal{F}(\bullet) & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{R}\Gamma_{T_2}^\dagger (\mathcal{E}(\bullet)) \otimes_{\mathcal{O}_{P,Q}}^{\mathbb{L}} \mathbb{R}\Gamma_{T_1}^\dagger (\mathcal{F}(\bullet)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}(\bullet) \otimes_{\mathcal{O}_{P,Q}}^{\mathbb{L}} \mathbb{R}\Gamma_{T_2}^\dagger \circ \mathbb{R}\Gamma_{T_1}^\dagger (\mathcal{F}(\bullet)).
\end{array} \quad (4.2.3.5)$$

**4.2.4.** Soient  $T$  un diviseur  $P$ ,  $\mathcal{E}(\bullet)$ ,  $\mathcal{F}(\bullet) \in \underline{LD}_{\mathbb{Q},qc}^b(\tilde{\mathcal{D}}_P^\bullet)$ . On dispose des isomorphismes  $(^\dagger T)(\mathcal{E}(\bullet) \otimes_{\mathcal{O}_{P,Q}}^{\mathbb{L}} \mathcal{F}(\bullet)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}(\bullet) \otimes_{\mathcal{O}_{P,Q}}^{\mathbb{L}} (^\dagger T)(\mathcal{F}(\bullet))$ , et  $\mathbb{R}\Gamma_T^\dagger (\mathcal{E}(\bullet) \otimes_{\mathcal{O}_{P,Q}}^{\mathbb{L}} \mathcal{F}(\bullet)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}(\bullet) \otimes_{\mathcal{O}_{P,Q}}^{\mathbb{L}} \mathbb{R}\Gamma_T^\dagger (\mathcal{F}(\bullet))$  fonctoriels en  $T$ ,  $\mathcal{E}(\bullet)$ ,  $\mathcal{F}(\bullet)$ . De manière identique à 4.2.3 (il s'agit de changer la position des parenthèses) on vérifie que ces isomorphismes sont compatibles avec les trois isomorphismes de commutation des foncteurs locaux et de localisation de 4.2.2. Il en résulte par composition qu'il en est de même des isomorphismes  $(^\dagger T)(\mathcal{E}(\bullet) \otimes_{\mathcal{O}_{P,Q}}^{\mathbb{L}} \mathcal{F}(\bullet)) \xrightarrow{\sim} (^\dagger T)(\mathcal{E}(\bullet)) \otimes_{\mathcal{O}_{P,Q}}^{\mathbb{L}} \mathcal{F}(\bullet)$  et  $\mathbb{R}\Gamma_T^\dagger (\mathcal{E}(\bullet) \otimes_{\mathcal{O}_{P,Q}}^{\mathbb{L}} \mathcal{F}(\bullet)) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma_T^\dagger (\mathcal{E}(\bullet)) \otimes_{\mathcal{O}_{P,Q}}^{\mathbb{L}} \mathcal{F}(\bullet)$ .

**4.2.5.** Soient  $T_1, \dots, T_r$  et  $T'_1, \dots, T'_s$  des diviseurs de  $P$ ,  $\mathcal{E}(\bullet)$ ,  $\mathcal{F}(\bullet) \in \underline{LD}_{\mathbb{Q},qc}^b(\tilde{\mathcal{D}}_P^\bullet)$ . En utilisant  $s$ -fois le diagramme 4.2.1.1, on vérifie que l'on dispose des isomorphismes canoniques fonctoriels en  $T_1, \dots, T_r, T'_1, \dots, T'_s, \mathcal{E}(\bullet)$ ,  $\mathcal{F}(\bullet)$  de la forme

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}\Gamma_{T'_1}^\dagger \circ \dots \circ \mathbb{R}\Gamma_{T'_s}^\dagger \circ \mathbb{R}\Gamma_{T_1}^\dagger \circ \dots \circ \mathbb{R}\Gamma_{T_r}^\dagger (\mathcal{E}(\bullet) \otimes_{\mathcal{O}_{P,Q}}^{\mathbb{L}} \mathcal{F}(\bullet)) & \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma_{T'_1}^\dagger \circ \dots \circ \mathbb{R}\Gamma_{T'_s}^\dagger (\mathcal{E}(\bullet) \otimes_{\mathcal{O}_{P,Q}}^{\mathbb{L}} \mathbb{R}\Gamma_{T_1}^\dagger \circ \dots \circ \mathbb{R}\Gamma_{T_r}^\dagger (\mathcal{F}(\bullet))) \\
& \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma_{T'_1}^\dagger \circ \dots \circ \mathbb{R}\Gamma_{T'_s}^\dagger (\mathcal{E}(\bullet)) \otimes_{\mathcal{O}_{P,Q}}^{\mathbb{L}} \mathbb{R}\Gamma_{T_1}^\dagger \circ \dots \circ \mathbb{R}\Gamma_{T_r}^\dagger (\mathcal{F}(\bullet)),
\end{aligned} \quad (4.2.5.1)$$

ceux-ci ne dépendant pas, à isomorphisme canonique près, de l'ordre des  $T_1, \dots, T_r$  ou des  $T'_1, \dots, T'_s$ . En particulier, en prenant  $\mathcal{F}(\bullet) = \mathcal{O}_P^\bullet$  et les  $T'_1, \dots, T'_s$  vides, on obtient l'isomorphisme canonique fonctoriel en  $T_1, \dots, T_r, \mathcal{E}(\bullet)$  de la forme :

$$\mathbb{R}\Gamma_{T_1}^\dagger \circ \dots \circ \mathbb{R}\Gamma_{T_r}^\dagger (\mathcal{E}(\bullet)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}(\bullet) \otimes_{\mathcal{O}_{P,Q}}^{\mathbb{L}} \mathbb{R}\Gamma_{T_1}^\dagger \circ \dots \circ \mathbb{R}\Gamma_{T_r}^\dagger (\mathcal{O}_P^\bullet) \quad (4.2.5.2)$$

et qui ne dépend pas, à isomorphisme canonique près, de l'ordre des  $T_1, \dots, T_r$ .

### 4.3 Foncteur cohomologique local à support strict dans un sous-schéma fermé

*Remarques 4.3.1.* Soient  $X$  une sous-variété fermée de  $P$ ,  $\mathcal{U}$  est l'ouvert de  $\mathcal{P}$  complémentaire de  $X$ ,  $D$  un diviseur de  $X$ ,  $\mathcal{E}(\bullet) \in \underline{LD}_{\mathbb{Q},coh}^b(\tilde{\mathcal{D}}_P^\bullet(D))$ . Alors  $\mathcal{E}(\bullet)|_{\mathcal{U}} \xrightarrow{\sim} 0$  dans  $\underline{LD}_{\mathbb{Q},coh}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{U}}^\bullet(D \cap U))$  si et seulement si les espaces de cohomologie de  $\varinjlim \mathcal{E}(\bullet)$  sont des  $\mathcal{D}_P^\dagger(^\dagger D)_{\mathbb{Q}}$ -cohérents à support dans  $X$  au sens classique.

**Lemme 4.3.2.** Soient  $D$ ,  $T$  deux diviseurs de  $P$ ,  $\mathcal{E}(\bullet) \in \underline{LD}_{\mathbb{Q},coh}^b(\tilde{\mathcal{D}}_P^\bullet(D))$ ,  $\mathcal{U}$  l'ouvert de  $\mathcal{P}$  complémentaire du support de  $T$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. On dispose dans  $\underline{LD}_{\mathbb{Q},coh}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{U}}^\bullet(D \cap U))$  de l'isomorphisme  $\mathcal{E}(\bullet)|_{\mathcal{U}} \xrightarrow{\sim} 0$ .
2. Le morphisme canonique  $\mathbb{R}\Gamma_T^\dagger (\mathcal{E}(\bullet)) \rightarrow \mathcal{E}(\bullet)$  est un isomorphisme dans  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_P^\bullet(D))$ .
3. On dispose dans  $\underline{LD}_{\mathbb{Q},coh}^b(\tilde{\mathcal{D}}_P^\bullet(D))$  de l'isomorphisme  $(^\dagger T)(\mathcal{E}(\bullet)) \xrightarrow{\sim} 0$ .

*Démonstration.* L'équivalence entre 2 et 3 est tautologique (i.e., on dispose du triangle distingué 4.1.1.1). L'assertion  $3 \Rightarrow 1$  est triviale. Réciproquement, établissons  $1 \Rightarrow 3$ . Comme  $(^\dagger T)(\mathcal{E}(\bullet)) \xrightarrow{\sim} (^\dagger T) \circ (^\dagger D)(\mathcal{E}(\bullet)) \xrightarrow{\sim} (^\dagger T \cup D)(\mathcal{E}(\bullet)) \in \underline{LD}_{\mathbb{Q},coh}^b(\tilde{\mathcal{D}}_P^\bullet(D \cup T))$ , comme le foncteur  $\varinjlim$  est pleinement fidèle sur  $\underline{LD}_{\mathbb{Q},coh}^b(\tilde{\mathcal{D}}_P^\bullet(D \cup T))$ , il est alors équivalent de prouver que  $\varinjlim (^\dagger T)(\mathcal{E}(\bullet)) \xrightarrow{\sim} 0$ . Comme  $\varinjlim (^\dagger T)(\mathcal{E}(\bullet))$  est un  $\mathcal{D}_P^\dagger(^\dagger T \cup D)_{\mathbb{Q}}$ -cohérent à support dans  $T$  (et donc dans  $T \cup D$ ), ce dernier est bien nul grâce à [Ber96b, 4.3.12].  $\square$



**Lemme 4.3.3.** Soient  $T_1, \dots, T_r$  des diviseurs de  $P$ . Alors  $\mathbb{R}\Gamma_{T_r}^\dagger \circ \dots \circ \mathbb{R}\Gamma_{T_1}^\dagger(\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)})$ .

*Démonstration.* Comme d'après 3.2.8 on dispose de l'isomorphisme canonique  $(\dagger T_1)(\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \xrightarrow{\sim} \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T_1 \cup T)$ , on obtient le triangle distingué :

$$\mathbb{R}\Gamma_{T_1}^\dagger(\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T) \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T_1 \cup T) \rightarrow \mathbb{R}\Gamma_{T_1}^\dagger(\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))[1]. \quad (4.3.3.1)$$

D'après 3.5.3, il en résulte que le triangle distingué 4.3.3.1 est un triangle dans  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)})$ . On en déduit par récurrence sur  $r$  (on applique le foncteur  $\mathbb{R}\Gamma_{T_r}^\dagger \circ \dots \circ \mathbb{R}\Gamma_{T_2}^\dagger$  au triangle distingué 4.3.3.1) le résultat.  $\square$

**4.3.4.** Soit  $X$  un sous-schéma fermé réduit de  $P$ . Nous allons rappeler la définition du foncteur cohomologique local  $\mathbb{R}\Gamma_X^\dagger$  à support strict dans  $X$ . Comme  $P$  est somme de ses composantes irréductibles, il suffit de le définir dans le cas où  $P$  est intègre.

1. Si  $X = P$ , alors le foncteur  $\mathbb{R}\Gamma_X^\dagger$  est par définition l'identité.
2. Supposons à présent  $X \neq P$ . D'après [Car04, 2.2.5] (il y a une coquille : il faut rajouter l'hypothèse «  $P$  est intègre »)  $X$  est une intersection finie de diviseur de  $P$ . Précisons que l'on s'était ramené au cas où  $X$  est irréductible en utilisant la formule de commutation des réunions et intersections de la forme  $\bigcup_{i=1}^r \bigcap_{j=1}^s D_{i,j} = \bigcap_{1 \leq j_1, \dots, j_r \leq s} \bigcup_{i=1}^r D_{i,j_i}$ , pour une famille de sous-ensembles (e.g. des supports de diviseurs)  $D_{i,j}$  de  $P$ . Si  $T_1, \dots, T_r$  sont des diviseurs de  $P$  tels que  $X = \bigcap_{i=1}^r T_i$ , alors, pour tout  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{qc}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)})$ , le complexe  $\mathbb{R}\Gamma_X^\dagger(\mathcal{E}^{(\bullet)}) := \mathbb{R}\Gamma_{T_r}^\dagger \circ \dots \circ \mathbb{R}\Gamma_{T_1}^\dagger(\mathcal{E}^{(\bullet)})$  ne dépend canoniquement pas du choix de tels diviseurs  $T_1, \dots, T_r$ . En effet, grâce à 4.2.5.2, on se ramène au cas où  $\mathcal{E}^{(\bullet)} = \mathcal{O}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}$  ; on vérifie ensuite que cela ne dépend pas de l'ordre des diviseurs  $T_1, \dots, T_r$  ; puis, grâce aux lemmes 4.3.2 et 4.3.3, il est superflu de rajouter d'autres diviseurs contenant  $X$ .

Pour toutes sous-variétés fermées  $X, X'$  de  $P$ , on dispose alors par construction (voir [Car04, 2.2.8]) de l'isomorphisme canonique :

$$\mathbb{R}\Gamma_X^\dagger \circ \mathbb{R}\Gamma_{X'}^\dagger(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma_{X \cap X'}^\dagger(\mathcal{E}^{(\bullet)}). \quad (4.3.4.1)$$

**Proposition 4.3.5.** Soient  $X, X'$  deux sous-schémas fermés de  $P$ ,  $\mathcal{E}^{(\bullet)}, \mathcal{F}^{(\bullet)} \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{qc}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)})$ . On dispose de l'isomorphisme canonique fonctoriel en  $\mathcal{E}^{(\bullet)}, \mathcal{F}^{(\bullet)}, X, X'$  :

$$\mathbb{R}\Gamma_{X \cap X'}^\dagger(\mathcal{E}^{(\bullet)} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}, \mathbb{Q}}}^\mathbb{L} \mathcal{F}^{(\bullet)}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma_X^\dagger(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}, \mathbb{Q}}}^\mathbb{L} \mathbb{R}\Gamma_{X'}^\dagger(\mathcal{F}^{(\bullet)}). \quad (4.3.5.1)$$

*Démonstration.* Cela résulte des isomorphismes canoniques 4.2.5.1.  $\square$

## 4.4 Foncteur de localisation en dehors d'un sous-schéma fermé

**Lemme 4.4.1.** Soient  $X \subset X'$  deux sous-variétés fermées de  $P$ ,  $\mathcal{E}^{(\bullet)}, \mathcal{F}^{(\bullet)} \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{qc}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)})$ . On suppose de plus que l'on dispose dans  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{qc}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)})$  de l'isomorphisme  $\mathbb{R}\Gamma_{X'}^\dagger(\mathcal{F}^{(\bullet)}) \xrightarrow{\sim} 0$ . Alors  $\text{Hom}_{\underline{LD}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)})}(\mathbb{R}\Gamma_X^\dagger(\mathcal{E}^{(\bullet)}), \mathcal{F}^{(\bullet)}) = 0$ .

*Démonstration.* Soit  $\phi : \mathbb{R}\Gamma_X^\dagger(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \rightarrow \mathcal{F}^{(\bullet)}$  un morphisme de  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{qc}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)})$ . Comme le morphisme canonique  $\mathbb{R}\Gamma_X^\dagger(\mathbb{R}\Gamma_X^\dagger(\mathcal{E}^{(\bullet)})) \rightarrow \mathbb{R}\Gamma_X^\dagger(\mathcal{E}^{(\bullet)})$  est un isomorphisme de  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{qc}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)})$  (voir 4.3.4.1), le morphisme  $\phi$  se factorise canoniquement par  $\mathbb{R}\Gamma_X^\dagger(\phi)$ . Or, comme  $\mathbb{R}\Gamma_X^\dagger(\mathcal{F}^{(\bullet)}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma_X^\dagger \circ \mathbb{R}\Gamma_{X'}^\dagger(\mathcal{F}^{(\bullet)}) \xrightarrow{\sim} 0$ , alors  $\mathbb{R}\Gamma_X^\dagger(\phi) \xrightarrow{\sim} 0$  dans  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{qc}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)})$ . On en déduit que  $\phi = 0$ . D'où le résultat.  $\square$

**Lemme 4.4.2.** Soient  $X$  une sous-variété fermée de  $P$  et un triangle distingué dans  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{qc}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)})$  de la forme

$$\mathbb{R}\Gamma_X^\dagger(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \rightarrow \mathcal{E}^{(\bullet)} \rightarrow \mathcal{F}^{(\bullet)} \rightarrow \mathbb{R}\Gamma_X^\dagger(\mathcal{E}^{(\bullet)})[1], \quad (4.4.2.1)$$

où le premier morphisme est le morphisme canonique. On dispose alors de l'isomorphisme  $\mathbb{R}\Gamma_X^\dagger(\mathcal{F}^{(\bullet)}) \xrightarrow{\sim} 0$  dans  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{qc}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)})$ .

*Démonstration.* Comme le morphisme canonique  $\mathbb{R}\Gamma_X^\dagger(\mathbb{R}\Gamma_X^\dagger(\mathcal{E}(\bullet))) \rightarrow \mathbb{R}\Gamma_X^\dagger(\mathcal{E}(\bullet))$  est un isomorphisme (voir 4.3.4.1), en appliquant le foncteur  $\mathbb{R}\Gamma_X^\dagger$  au triangle distingué 4.4.2.1, l'un des axiomes sur les catégories triangulées nous permet de conclure.  $\square$

**4.4.3** (Foncteur localisation en dehors d'une sous-variété fermée  $X$ ). Soient  $X \subset X'$  deux sous-variétés de  $P$ . Supposons donné le diagramme commutatif dans  $\underline{LD}_{\mathbb{Q},qc}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_P^{(\bullet)})$  de la forme

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R}\Gamma_X^\dagger(\mathcal{E}(\bullet)) & \longrightarrow & \mathcal{E}(\bullet) & \longrightarrow & \mathcal{F}(\bullet)[1] & \longrightarrow & \mathbb{R}\Gamma_X^\dagger(\mathcal{E}(\bullet))[1] \\ \downarrow \mathbb{R}\Gamma_X^\dagger(\phi) & & \downarrow \phi & & & & \downarrow \mathbb{R}\Gamma_X^\dagger(\phi) \\ \mathbb{R}\Gamma_{X'}^\dagger(\mathcal{E}'(\bullet)) & \longrightarrow & \mathcal{E}'(\bullet) & \longrightarrow & \mathcal{F}'(\bullet) & \longrightarrow & \mathbb{R}\Gamma_{X'}^\dagger(\mathcal{E}'(\bullet))[1] \end{array} \quad (4.4.3.1)$$

dont les flèches horizontales de gauche sont les morphismes canoniques et dont les deux triangles horizontaux sont distingués. D'après les lemmes 4.4.1 et 4.4.2, on obtient alors

$$H^{-1}(\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{D(\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\widetilde{\mathcal{D}}_P^{(\bullet)}))}(\mathbb{R}\Gamma_X^\dagger(\mathcal{E}(\bullet)), \mathcal{F}'(\bullet))) = \mathrm{Hom}_{D(\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\widetilde{\mathcal{D}}_P^{(\bullet)}))}(\mathbb{R}\Gamma_X^\dagger(\mathcal{E}(\bullet)), \mathcal{F}'(\bullet)[-1]) = 0.$$

On en déduit, grâce à [BBD82, 1.1.9], qu'il existe donc un unique morphisme  $\mathcal{F}(\bullet) \rightarrow \mathcal{F}'(\bullet)$  induisant dans  $\underline{LD}_{\mathbb{Q},qc}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_P^{(\bullet)})$  le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R}\Gamma_X^\dagger(\mathcal{E}(\bullet)) & \longrightarrow & \mathcal{E}(\bullet) & \longrightarrow & \mathcal{F}(\bullet) & \longrightarrow & \mathbb{R}\Gamma_X^\dagger(\mathcal{E}(\bullet))[1] \\ \downarrow \mathbb{R}\Gamma_X^\dagger(\phi) & & \downarrow \phi & & \downarrow \exists! & & \downarrow \mathbb{R}\Gamma_X^\dagger(\phi) \\ \mathbb{R}\Gamma_{X'}^\dagger(\mathcal{E}'(\bullet)) & \longrightarrow & \mathcal{E}'(\bullet) & \longrightarrow & \mathcal{F}'(\bullet) & \longrightarrow & \mathbb{R}\Gamma_{X'}^\dagger(\mathcal{E}'(\bullet))[1]. \end{array} \quad (4.4.3.2)$$

Comme pour [BBD82, 1.1.10], cela implique que le cône de  $\mathbb{R}\Gamma_X^\dagger(\mathcal{E}(\bullet)) \rightarrow \mathcal{E}(\bullet)$  est unique à isomorphisme canonique près. On le notera  $(^\dagger X)(\mathcal{E}(\bullet))$ . On vérifie de plus que  $(^\dagger X)(\mathcal{E}(\bullet))$  est fonctoriel en  $X$  et  $\mathcal{E}(\bullet)$ , e.g. on dispose du morphisme fonctoriel en  $\mathcal{E}(\bullet)$  de forme  $\mathcal{E}(\bullet) \rightarrow (^\dagger X)(\mathcal{E}(\bullet))$ .

**4.4.4.** Pour toute sous-variété fermée  $X$  de  $P$ , pour tous  $\mathcal{E}(\bullet), \mathcal{F}(\bullet) \in \underline{LD}_{\mathbb{Q},qc}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_P^{(\bullet)})$ , il existe un unique isomorphisme de la forme  $(^\dagger X)(\mathcal{E}(\bullet) \otimes_{\mathcal{O}_{P,Q}}^\mathbb{L} \mathcal{F}(\bullet)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}(\bullet) \otimes_{\mathcal{O}_{P,Q}}^\mathbb{L} (^\dagger X)(\mathcal{F}(\bullet))$  s'inscrivant dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R}\Gamma_X^\dagger(\mathcal{E}(\bullet) \otimes_{\mathcal{O}_{P,Q}}^\mathbb{L} \mathcal{F}(\bullet)) & \longrightarrow & \mathcal{E}(\bullet) \otimes_{\mathcal{O}_{P,Q}}^\mathbb{L} \mathcal{F}(\bullet) & \longrightarrow & (^\dagger X)(\mathcal{E}(\bullet) \otimes_{\mathcal{O}_{P,Q}}^\mathbb{L} \mathcal{F}(\bullet)) & \longrightarrow & \mathbb{R}\Gamma_X^\dagger(\mathcal{E}(\bullet) \otimes_{\mathcal{O}_{P,Q}}^\mathbb{L} \mathcal{F}(\bullet))[1] \\ 4.3.5.1 \downarrow \sim & & \parallel & & \downarrow \exists! & & 4.3.5.1 \downarrow \sim \\ \mathcal{E}(\bullet) \otimes_{\mathcal{O}_{P,Q}}^\mathbb{L} \mathbb{R}\Gamma_X^\dagger(\mathcal{F}(\bullet)) & \longrightarrow & \mathcal{E}(\bullet) \otimes_{\mathcal{O}_{P,Q}}^\mathbb{L} \mathcal{F}(\bullet) & \longrightarrow & \mathcal{E}(\bullet) \otimes_{\mathcal{O}_{P,Q}}^\mathbb{L} (^\dagger X)(\mathcal{F}(\bullet)) & \longrightarrow & \mathcal{E}(\bullet) \otimes_{\mathcal{O}_{P,Q}}^\mathbb{L} \mathbb{R}\Gamma_X^\dagger(\mathcal{F}(\bullet))[1]. \end{array}$$

Comme d'habitude (en écrivant des parallélépipèdes), on vérifie qu'il est fonctoriel en  $X, \mathcal{E}(\bullet), \mathcal{F}(\bullet)$ .

**4.4.5.** Soient  $X, X'$  deux sous-variétés fermées de  $P$ ,  $\mathcal{E}(\bullet) \in \underline{LD}_{\mathbb{Q},qc}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_P^{(\bullet)})$ . Il existe alors un unique isomorphisme  $(^\dagger X') \circ \mathbb{R}\Gamma_X^\dagger(\mathcal{E}(\bullet)) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma_X^\dagger \circ (^\dagger X')(\mathcal{E}(\bullet))$  fonctoriel en  $X, X', \mathcal{E}(\bullet)$  s'inscrivant dans le diagramme commutatif de la forme

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R}\Gamma_{X'}^\dagger \circ \mathbb{R}\Gamma_X^\dagger(\mathcal{E}(\bullet)) & \longrightarrow & \mathbb{R}\Gamma_X^\dagger(\mathcal{E}(\bullet)) & \longrightarrow & (^\dagger X') \circ \mathbb{R}\Gamma_X^\dagger(\mathcal{E}(\bullet)) & \longrightarrow & \mathbb{R}\Gamma_{X'}^\dagger \circ \mathbb{R}\Gamma_X^\dagger(\mathcal{E}(\bullet))[1] \\ \downarrow \sim & & \parallel & & \downarrow \exists! & & \downarrow \sim \\ \mathbb{R}\Gamma_X^\dagger \circ \mathbb{R}\Gamma_{X'}^\dagger(\mathcal{E}(\bullet)) & \longrightarrow & \mathbb{R}\Gamma_X^\dagger(\mathcal{E}(\bullet)) & \longrightarrow & \mathbb{R}\Gamma_X^\dagger \circ (^\dagger X')(\mathcal{E}(\bullet)) & \longrightarrow & (^\dagger X) \circ \mathbb{R}\Gamma_{X'}^\dagger(\mathcal{E}(\bullet))[1], \end{array}$$

D'après [Car04, 2.2.14] (cette fois-ci, il n'y a aucune précision à apporter), on dispose de plus de l'isomorphisme canonique

$$(\dagger X) \circ (\dagger X')(\mathcal{E}(\bullet)) \xrightarrow{\sim} (\dagger X \cup X')(\mathcal{E}(\bullet)), \quad (4.4.5.1)$$

fonctoriel en  $X, X', \mathcal{E}(\bullet)$ . D'après [Car04, 2.2.16], on a les triangles distingués de localisation de Mayer-Vietoris

$$\mathbb{R}\Gamma_{X \cap X'}^\dagger(\mathcal{E}(\bullet)) \rightarrow \mathbb{R}\Gamma_X^\dagger(\mathcal{E}(\bullet)) \oplus \mathbb{R}\Gamma_{X'}^\dagger(\mathcal{E}(\bullet)) \rightarrow \mathbb{R}\Gamma_{X \cup X'}^\dagger(\mathcal{E}(\bullet)) \rightarrow \mathbb{R}\Gamma_{X \cap X'}^\dagger(\mathcal{E}(\bullet))[1], \quad (4.4.5.2)$$

$$(\dagger X \cap X')(\mathcal{E}) \rightarrow (\dagger X)(\mathcal{E}(\bullet)) \oplus (\dagger X')(\mathcal{E}(\bullet)) \rightarrow (\dagger X \cup X')(\mathcal{E}(\bullet)) \rightarrow (\dagger X \cap X')(\mathcal{E}(\bullet))[1]. \quad (4.4.5.3)$$

Nous ajouterons dans le prochain chapitre (voir 5.2.8) un détail sur la vérification de la commutativité des foncteurs locaux et de localisation par rapport aux images inverses extraordinaires de [Car04, 2.2.18]. Finissons enfin le chapitre par une extension du lemme 4.3.2 :

**Proposition 4.4.6.** *Soient  $D$  un diviseur de  $P$ ,  $X$  une sous-variété fermée de  $P$ ,  $\mathfrak{U}$  l'ouvert de  $\mathcal{P}$  complémentaire du support de  $X$ ,  $\mathcal{E}(\bullet) \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(D))$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *On dispose dans  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{U}}^{(\bullet)}(D \cap U))$  de l'isomorphisme  $\mathcal{E}(\bullet)|_{\mathfrak{U}} \xrightarrow{\sim} 0$ .*
2. *Le morphisme canonique  $\mathbb{R}\Gamma_X^{\dagger}(\mathcal{E}(\bullet)) \rightarrow \mathcal{E}(\bullet)$  est un isomorphisme dans  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(D))$ .*
3. *On dispose dans  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(D))$  de l'isomorphisme  $({}^{\dagger}X)(\mathcal{E}(\bullet)) \xrightarrow{\sim} 0$ .*

*Démonstration.* L'équivalence entre 2 et 3 est tautologique (voir la définition du foncteur  $({}^{\dagger}X)$  donnée dans 4.4.3). L'assertion 3  $\Rightarrow$  1 est triviale. Il reste à établir l'implication 1  $\Rightarrow$  2. Soit  $T$  un diviseur contenant  $X$ . Par construction du foncteur  $\mathbb{R}\Gamma_X^{\dagger}$ , il suffit de vérifier que le morphisme  $\mathbb{R}\Gamma_T^{\dagger}(\mathcal{E}(\bullet)) \rightarrow \mathcal{E}(\bullet)$  est un isomorphisme, ce qui résulte du lemme 4.3.2.  $\square$

## 5 Surcohérence

### 5.1 Image inverse extraordinaire, image directe

Soient  $f: \mathcal{P}' \rightarrow \mathcal{P}$  un morphisme de  $\mathcal{V}$ -schémas formels lisses,  $T$  et  $T'$  des diviseurs respectifs de  $P$  et  $P'$  tels que  $f(P' \setminus T') \subset P \setminus T$ . Nous rappelons dans cette section les constructions des images inverses extraordinaires et des images directes par  $f$  à singularités surconvergentes le long de  $T$  et  $T'$ .

*Notations 5.1.1.* Nous aurons besoin de quelques notations préliminaires afin de définir l'image inverse extraordinaire par  $f$  à singularités surconvergentes le long de  $T$  et  $T'$ .

- Comme  $f^{-1}(T) \subset T'$ , on dispose alors du morphisme canonique  $f^{-1}\widetilde{B}_{X_i}^{(m)}(T) \rightarrow \widetilde{B}_{X_i}^{(m)}(T')$ . Il en résulte que le faisceau  $\widetilde{B}_{X_i}^{(m)}(T') \otimes_{\mathcal{O}_{X_i'}} f_i^* \mathcal{D}_{X_i}^{(m)} \xrightarrow{\sim} \widetilde{B}_{X_i}^{(m)}(T') \otimes_{f^{-1}\widetilde{B}_{X_i}^{(m)}(T)} f^{-1}\widetilde{D}_{X_i}^{(m)}(T)$  est muni d'une structure canonique de  $(\widetilde{D}_{X_i'}^{(m)}(T'), f_i^{-1}\widetilde{D}_{X_i}^{(m)}(T))$ -bimodule. Ce bimodule sera noté  $\widetilde{D}_{X_i' \rightarrow X_i}^{(m)}(T', T)$ .
- Il en dérive par complétion  $p$ -adique le  $(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}'}^{(m)}(T'), f^{-1}\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}(T))$ -bimodule :  $\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}}^{(m)}(T', T) := \varprojlim_i \widetilde{D}_{X_i' \rightarrow X_i}^{(m)}(T', T)$ .
- On obtient un  $(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}'}^{\dagger}({}^{\dagger}T')_{\mathbb{Q}}, f^{-1}\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}})$ -bimodule en posant  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}}^{\dagger}({}^{\dagger}T', T)_{\mathbb{Q}} := \varinjlim_m \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}}^{(m)}(T', T)_{\mathbb{Q}}$ .

**5.1.2.** On bénéficie du foncteur image inverse extraordinaire par  $f$  à singularités surconvergentes le long de  $T$  et  $T'$  de la forme  $f_{T', T}^{(\bullet)!}: \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{qc}}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \rightarrow \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{qc}}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}'}^{(\bullet)}(T'))$  en posant, pour tout  $\mathcal{E}(\bullet) \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{qc}}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(\bullet)}(T))$  :

$$f_{T', T}^{(\bullet)!}(\mathcal{E}(\bullet)) := \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}}^{(\bullet)}(T', T) \widehat{\otimes}_{f^{-1}\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(\bullet)}(T)}^{\mathbb{L}} f^{-1}\mathcal{E}(\bullet)[d_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{X}}].$$

On dispose du foncteur image inverse extraordinaire par  $f$  à singularités surconvergentes le long de  $T$  et  $T'$  de la forme  $f_{T', T}^{\dagger}: D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}) \rightarrow D^b(\mathcal{D}_{\mathcal{P}'}^{\dagger}({}^{\dagger}T')_{\mathbb{Q}})$  en posant (comme pour [Ber02, 4.3.2]), pour tout  $\mathcal{E} \in D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}})$  :

$$f_{T', T}^{\dagger}(\mathcal{E}) := \mathcal{D}_{\mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}}^{\dagger}({}^{\dagger}T', T)_{\mathbb{Q}} \widehat{\otimes}_{f^{-1}\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}} f^{-1}\mathcal{E}[d_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{X}}]. \quad (5.1.2.1)$$

Si  $f$  est lisse, alors  $f_{T', T}^{\dagger}(\mathcal{E}) \in D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}'}^{\dagger}({}^{\dagger}T')_{\mathbb{Q}})$ .

*Notations 5.1.3.* Nous aurons besoin pour définir l'image directe par  $f$  à singularités surconvergentes le long de  $T$  et  $T'$  de considérer les bimodules ci-dessous.

- Le  $(f^{-1}\widetilde{D}_{X_i}^{(m)}(T), \widetilde{D}_{X_i'}^{(m)}(T'))$ -bimodule  $\widetilde{B}_{X_i'}^{(m)}(T') \otimes_{\mathcal{O}_{X_i'}} (\omega_{X_i'} \otimes_{\mathcal{O}_{X_i'}} f_g^*(\mathcal{D}_{X_i}^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}} \omega_{X_i}^{-1}))$ , où l'indice  $g$  signifie que l'on choisit la structure gauche de  $\mathcal{D}_{X_i}^{(m)}$ -module à gauche, sera noté  $\widetilde{D}_{X_i \leftarrow X_i'}^{(m)}(T, T')$ .
- On dispose alors du  $(f^{-1}\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}(T), \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}'}^{(m)}(T'))$ -bimodule :  $\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathfrak{X}'}^{(m)}(T, T') := \lim_{\leftarrow i} \widetilde{D}_{X_i \leftarrow X_i'}^{(m)}(T, T')$ .
- D'où le  $(f^{-1}\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}, \mathcal{D}_{\mathfrak{X}'}^{\dagger}(\dagger T')_{\mathbb{Q}})$ -bimodule  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathfrak{X}'}^{\dagger}(\dagger T, T')_{\mathbb{Q}} := \lim_{\rightarrow m} \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathfrak{X}'}^{(m)}(T, T')_{\mathbb{Q}}$ .

**5.1.4.** On dispose du foncteur image directe par  $f$  à singularités surconvergentes le long de  $T$  et  $T'$  de la forme  $f_{T, T', +}^{(\bullet)} : \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{qc}}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{P}'}^{(\bullet)}(T')) \rightarrow \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{qc}}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{P}}^{(\bullet)}(T))$  en posant, pour tout  $\mathcal{E}'^{(\bullet)} \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{qc}}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}'}^{(\bullet)}(T'))$  :

$$f_{T, T', +}^{(\bullet)}(\mathcal{E}'^{(\bullet)}) := \mathbb{R}f_* (\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathfrak{X}'}^{(\bullet)}(T, T') \otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}'}^{(\bullet)}(T')}^{\mathbb{L}} \mathcal{E}'^{(\bullet)}).$$

Avec [Ber02, 4.3.7], on construit le foncteur image directe par  $f$  à singularités surconvergentes le long de  $T$  et  $T'$  de la forme  $f_{T, T', +} : D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{P}'}^{\dagger}(\dagger T')_{\mathbb{Q}}) \rightarrow D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{P}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}})$  en posant, pour tout  $\mathcal{E}' \in D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}'}^{\dagger}(\dagger T')_{\mathbb{Q}})$  :

$$f_{T, T', +}(\mathcal{E}') := \mathbb{R}f_* (\mathcal{D}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathfrak{X}'}^{\dagger}(\dagger T, T')_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X}'}^{\dagger}(\dagger T')_{\mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}} \mathcal{E}'). \quad (5.1.4.1)$$

Si  $f$  est propre et  $T' = f^{-1}(T)$ , alors  $f_{T, T', +}(\mathcal{E}') \in D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}})$ .

**5.1.5.** Avec les notations du paragraphe 3.5.5, on dispose de l'isomorphisme de foncteurs  $\text{Coh}_{T'}(f_{T, T', +}^{(\bullet)}) \xrightarrow{\sim} f_{T, T', +}$  et  $\text{Coh}_T(f_{T', T}^{(\bullet)!}) \xrightarrow{\sim} f_{T', T}^!$  (voir par exemple [Ber02, 4.3.2.2 et 4.3.7.1]).

**5.1.6.** Supposons  $T' = f^{-1}(T)$ . On écrit alors  $f_T^{(\bullet)!}$ ,  $f_T^!$ ,  $f_{T, +}^{(\bullet)}$  et  $f_{T, +}$  à la place respectivement de  $f_{T', T}^{(\bullet)!}$ ,  $f_{T', T}^!$ ,  $f_{T, T', +}^{(\bullet)}$  et  $f_{T, T', +}$ . Si  $T$  est l'ensemble vide, nous omettons de l'indiquer dans toutes les expressions faisant intervenir  $T$ .

## 5.2 Stabilité par image inverse du coefficient constant avec singularités surconvergentes

**Lemme 5.2.1.** Soient  $f : \mathcal{P}' \rightarrow \mathcal{P}$  un morphisme de  $\mathcal{V}$ -schémas formels lisses,  $T$  un diviseur de  $\mathcal{P}$  tel que  $T' := f^{-1}(T)$  soit un diviseur de  $\mathcal{P}'$ . On dispose alors de l'isomorphisme canonique

$$\mathcal{O}_{P_i'} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_{P_i}}^{\mathbb{L}} f^{-1}\mathcal{B}_{P_i}^{(m)}(T) \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}_{P_i'}^{(m)}(T').$$

On bénéficie de plus de l'isomorphisme canonique  $f^{(\bullet)!}(\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{P}}^{(\bullet)}(T)) \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{P}'}^{(\bullet)}(T')[d_{P'/P}]$  dans  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{P}'}^{(\bullet)})$ .

*Démonstration.* 1) Pour vérifier le premier isomorphisme, comme  $\mathcal{O}_{P_i'} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_{P_i}}^{\mathbb{L}} f^{-1}\mathcal{B}_{P_i}^{(m)}(T) \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}_{P_i'}^{(m)}(T')$ , il s'agit de prouver que le morphisme canonique  $\mathcal{O}_{P_i'} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_{P_i}}^{\mathbb{L}} f^{-1}\mathcal{B}_{P_i}^{(m)}(T) \rightarrow \mathcal{O}_{P_i'} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_{P_i}} f^{-1}\mathcal{B}_{P_i}^{(m)}(T)$  est un isomorphisme. Comme  $f$  est le composé de son graphe suivi de la projection  $\mathcal{P}' \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ , comme le cas où  $f$  est lisse est trivial, on se ramène au cas où  $f$  est une immersion fermée. Comme cela est local, on peut supposer  $\mathcal{P}$  affine et intègre. Comme  $\mathcal{B}_{P_i}^{(m)}(T)$  est quasi-cohérent, on se ramène à établir que le morphisme canonique  $\mathcal{O}_{P_i'} \otimes_{\mathcal{O}_{P_i}}^{\mathbb{L}} \mathcal{B}_{P_i}^{(m)}(T) \rightarrow \mathcal{O}_{P_i'} \otimes_{\mathcal{O}_{P_i}} \mathcal{B}_{P_i}^{(m)}(T)$  est un isomorphisme.

Comme  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathfrak{P}}^{(m)}(T)$  est sans  $p$ -torsion, on a :  $\mathcal{O}_{P_i'} \otimes_{\mathcal{O}_{P_i}}^{\mathbb{L}} \mathcal{B}_{P_i}^{(m)}(T) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{P_i'} \otimes_{\mathcal{O}_{P_i}}^{\mathbb{L}} (\mathcal{O}_{\mathcal{P}'} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}}^{\mathbb{L}} \widehat{\mathcal{B}}_{\mathfrak{P}}^{(m)}(T))$ . Or, comme  $f$  est fini, on dispose de l'isomorphisme canonique  $\mathcal{O}_{\mathcal{P}'} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}} \widehat{\mathcal{B}}_{\mathfrak{P}}^{(m)}(T) \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{B}}_{\mathfrak{P}'}^{(m)}(T')$ . Comme  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathfrak{P}}^{(m)}(T)$  est intègre, le morphisme

canonique  $\mathcal{O}_{\mathcal{P}'} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}}^{\mathbb{L}} \widehat{B}_{\mathcal{P}}^{(m)}(T) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{P}'} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}} \widehat{B}_{\mathcal{P}}^{(m)}(T)$  est un isomorphisme (pour le voir, on utilise la résolution de Koszul de  $\mathcal{O}_{\mathcal{P}'}$ ). Comme  $\widehat{B}_{\mathcal{P}'}^{(m)}(T')$  est sans  $p$ -torsion, on conclut.

2) Comme, pour tout entier positif  $m$ , les  $\mathcal{V}$ -modules  $\widetilde{B}_{\mathcal{P}'}^{(m)}(T')$  et  $\widetilde{B}_{\mathcal{P}}^{(m)}(T)$  sont sans  $p$ -torsion, le deuxième isomorphisme à prouver résulte aussitôt du premier.  $\square$

**5.2.2.** Soit  $u: \mathcal{P}' \rightarrow \mathcal{P}$  une immersion fermée de  $\mathcal{V}$ -schémas formels lisses. Dans ce cas, grâce à [Ber96b, 3.2.4], on vérifie que la flèche de droite du carré ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{\mathcal{P}'} \otimes_{u^{-1}\mathcal{O}_{\mathcal{P}}}^{\mathbb{L}} u^{-1}\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(m)} & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{O}_{\mathcal{P}'} \otimes_{u^{-1}\mathcal{O}_{\mathcal{P}}} u^{-1}\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(m)} \\ \downarrow & & \downarrow \sim \\ \mathcal{O}_{\mathcal{P}'} \widehat{\otimes}_{u^{-1}\mathcal{O}_{\mathcal{P}}}^{\mathbb{L}} u^{-1}\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(m)} & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{O}_{\mathcal{P}'} \widehat{\otimes}_{u^{-1}\mathcal{O}_{\mathcal{P}}} u^{-1}\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(m)} = \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}' \hookrightarrow \mathcal{P}}^{(m)} \end{array} \quad (5.2.2.1)$$

est un isomorphisme. De plus, par platitude de  $\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(m)}$  sur  $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}$ , on vérifie que la flèche horizontale du haut est un isomorphisme. Comme la flèche du bas est un morphisme de  $D_{\text{qc}}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}'}^{(m)})$  (cela résulte du théorème [Ber02, 3.2.3] de Berthelot), on vérifie de même que celle-ci est un isomorphisme. Il en est donc de même de la flèche de gauche. Pour tout  $\mathcal{E}^{(m)} \in D^-(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(m)})$  on en déduit que le morphisme canonique  $\mathcal{O}_{\mathcal{P}'} \otimes_{u^{-1}\mathcal{O}_{\mathcal{P}}}^{\mathbb{L}} u^{-1}\mathcal{E}^{(m)} \rightarrow \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}' \hookrightarrow \mathcal{P}}^{(m)} \otimes_{u^{-1}\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(m)}}^{\mathbb{L}} u^{-1}\mathcal{E}^{(m)}$

est un isomorphisme. On dispose alors du foncteur  $u_{\text{alg}}^{(m)!}: D^-(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(m)}) \rightarrow D^-(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}'}^{(m)})$  défini en posant, pour tout  $\mathcal{E}^{(m)} \in D^-(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(m)})$ ,

$$u_{\text{alg}}^{(m)!}(\mathcal{E}^{(m)}) := \mathcal{O}_{\mathcal{P}'} \otimes_{u^{-1}\mathcal{O}_{\mathcal{P}}}^{\mathbb{L}} u^{-1}\mathcal{E}^{(m)}[d_{\mathcal{P}'/\mathcal{P}}]. \quad (5.2.2.2)$$

**Lemme 5.2.3.** Soit  $u: \mathcal{P}' \rightarrow \mathcal{P}$  une immersion fermée de  $\mathcal{V}$ -schémas formels lisses. Pour tout  $\mathcal{E}^{(m)} \in D^-(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(m)})$ , on dispose du morphisme canonique  $u_{\text{alg}}^{(m)!}(\mathcal{E}^{(m)}) \rightarrow u^{(m)!}(\mathcal{E}^{(m)})$ . Si  $\mathcal{E}^{(m)} \in D_{\text{coh}}^-(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(m)})$ , alors celui-ci est un isomorphisme.

*Démonstration.* La construction se construit par adjonction via le morphisme d'espaces annelés  $(X_{\bullet}, \mathcal{O}_{X_{\bullet}}) \rightarrow (\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$ . Vérifions à présent que celui-ci est un isomorphisme pour les complexes à cohomologie cohérente. Comme cela est local, on peut supposer  $\mathcal{P}$  affine. D'après le lemme sur les foncteurs way-out (et le théorème de type A pour les  $\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(m)}$ -modules cohérents), on se ramène au cas où  $\mathcal{E}^{(m)}$  est de la forme  $\mathcal{E}^{(m)} = (\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(m)})^r$ . Dans ce cas, cela résulte de l'isomorphisme vertical de gauche du carré 5.2.2.1.  $\square$

**5.2.4.** Soit  $u: \mathcal{P}' \rightarrow \mathcal{P}$  une immersion fermée de  $\mathcal{V}$ -schémas formels lisses. On déduit de 5.2.2.2 que l'on dispose du foncteur  $u_{\text{alg}}^{(\bullet)!}: D^-(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}) \rightarrow D^-(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}'}^{(\bullet)})$  défini en posant, pour tout  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \in D^-(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)})$ ,

$$u_{\text{alg}}^{(\bullet)!}(\mathcal{E}^{(\bullet)}) := \mathcal{O}_{\mathcal{P}'} \otimes_{u^{-1}\mathcal{O}_{\mathcal{P}}}^{\mathbb{L}} u^{-1}\mathcal{E}^{(\bullet)}[d_{\mathcal{P}'/\mathcal{P}}]. \quad (5.2.4.1)$$

Ce foncteur envoie les ind-isogénies sur les ind-isogénies et les lim-ind-isogénies sur les lim-ind-isogénies (voir les définitions de 1.1.1). Ce foncteur se factorise donc en  $u_{\text{alg}}^{(\bullet)!}: \underline{LD}_{\mathbb{Q}}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}) \rightarrow \underline{LD}_{\mathbb{Q}}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}'}^{(\bullet)})$ . On prendra garde de constater que ce foncteur ne préserve pas la quasi-cohérence. On bénéficie, pour tout  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{qc}}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)})$ , du morphisme canonique  $u_{\text{alg}}^{(\bullet)!}(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \rightarrow u^{(\bullet)!}(\mathcal{E}^{(\bullet)})$  (ce morphisme se construit même dans  $D(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}'}^{(\bullet)})$ , i.e. avant de localiser).

**Lemme 5.2.5.** Soient  $u: \mathcal{P}' \rightarrow \mathcal{P}$  une immersion fermée de  $\mathcal{V}$ -schémas formels lisses,  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)})$ . Le morphisme canonique  $u_{\text{alg}}^{(\bullet)!}(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \rightarrow u^{(\bullet)!}(\mathcal{E}^{(\bullet)})$  est un isomorphisme dans  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}'}^{(\bullet)})$ .

*Démonstration.* Par définition, il existe  $\lambda \in L$  un isomorphisme  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)})$  de la forme  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}^{(\bullet)}$  tel que  $\mathcal{F}^{(m)} \in D_{\text{coh}}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{\lambda(m)})$  (plus une autre condition que l'on n'utilisera pas). On se ramène donc à établir le lemme pour  $\mathcal{F}^{(\bullet)}$  à la place de  $\mathcal{E}^{(\bullet)}$ . Notons  $u_{\text{alg}}^{\lambda(\bullet)!}(\mathcal{F}^{(\bullet)}) := (u_{\text{alg}}^{\lambda(m)!}(\mathcal{F}^{(m)}))_{m \in \mathbb{N}} \in D^b(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}'}^{\lambda(\bullet)})$  et  $u^{\lambda(\bullet)!}(\mathcal{F}^{(\bullet)}) := (u^{\lambda(m)!}(\mathcal{F}^{(m)}))_{m \in \mathbb{N}} \in D^b(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}'}^{\lambda(\bullet)})$ .

En omettant d'indiquer les foncteurs oublis, on dispose par définition de l'égalité  $u^{\lambda(\bullet)!}(\mathcal{F}(\bullet)) = u_{\text{alg}}^{(\bullet)!}(\mathcal{F}(\bullet))$ . De plus, on dispose du morphisme canonique  $u^{\lambda(\bullet)!}(\mathcal{F}(\bullet)) \rightarrow \lambda^*(u^{(\bullet)!}(\mathcal{F}(\bullet)))$  induisant le diagramme canonique commutatif :

$$\begin{array}{ccc} u^{(\bullet)!}(\mathcal{F}(\bullet)) & \longrightarrow & u^{\lambda(\bullet)!}(\mathcal{F}(\bullet)) \\ \downarrow & \swarrow \text{dotted} & \downarrow \\ \lambda^*(u^{(\bullet)!}(\mathcal{F}(\bullet))) & \longrightarrow & \lambda^*(u^{\lambda(\bullet)!}(\mathcal{F}(\bullet))) \end{array}$$

Il en résulte que  $u^{\lambda(\bullet)!}(\mathcal{F}(\bullet))$  est canoniquement isomorphe à  $u^{(\bullet)!}(\mathcal{F}(\bullet))$  dans  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}'}^{(\bullet)})$ . On se ramène à vérifier que le morphisme canonique

$$u_{\text{alg}}^{\lambda(\bullet)!}(\mathcal{F}(\bullet)) \rightarrow u^{\lambda(\bullet)!}(\mathcal{F}(\bullet)) \quad (5.2.5.1)$$

est un isomorphisme de  $D^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}'}^{\lambda(\bullet)})$ , ce qui résulte du fait que  $\mathcal{F}^{(m)} \in D_{\text{coh}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{\lambda(m)})$  et du lemme 5.2.3.  $\square$

**Lemme 5.2.6.** Soient  $u: \mathcal{P}' \rightarrow \mathcal{P}$  une immersion fermée de  $\mathcal{V}$ -schémas formels lisses,  $T$  un diviseur de  $P$  tel que  $u(P') \subset T$ . On dispose de l'isomorphisme canonique :  $u^{(\bullet)!}(\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \xrightarrow{\sim} 0$  dans  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}'}^{(\bullet)})$ .

*Démonstration.* 0) D'après la proposition 1.3.3, ce que l'on doit vérifier est local en  $\mathcal{P}$ . On peut supposer  $\mathcal{P}$  affine et muni de coordonnées locales  $t_1, \dots, t_d$  telles que  $\mathcal{P}' = V(t_1, \dots, t_r)$  et qu'il existe un élément  $f$  de  $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}$  tel que  $T = V(\bar{f})$ , où  $\bar{f}$  est la réduction de  $f$  modulo  $\pi\mathcal{O}_{\mathcal{P}}$ . Vérifions par récurrence sur  $r \geq 1$  le lemme.

1) Traitons d'abord le cas  $r = 1$ . Grâce à 5.2.5, il s'agit d'établir l'isomorphisme  $u_{\text{alg}}^{(\bullet)!}(\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \xrightarrow{\sim} 0$  dans  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}'}^{(\bullet)})$ . Comme  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$  est un faisceau d'anneaux intègres, en utilisant la suite exacte  $0 \rightarrow u^{-1}\mathcal{O}_{\mathcal{P}} \xrightarrow{t_1} u^{-1}\mathcal{O}_{\mathcal{P}} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{P}'} \rightarrow 0$  qui permet de résoudre  $\mathcal{O}_{\mathcal{P}'}$  par des  $u^{-1}\mathcal{O}_{\mathcal{P}}$ -modules plats, on vérifie que le morphisme canonique de la forme  $\mathcal{O}_{\mathcal{P}'} \otimes_{u^{-1}\mathcal{O}_{\mathcal{P}}} u^{-1}\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{P}'} \otimes_{u^{-1}\mathcal{O}_{\mathcal{P}}} u^{-1}\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$  est alors un isomorphisme dans  $D(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}'}^{(\bullet)})$ . Ainsi, on dispose de l'isomorphisme canonique  $u_{\text{alg}}^{(\bullet)!}(\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\mathcal{P}'} \otimes_{u^{-1}\mathcal{O}_{\mathcal{P}}} u^{-1}\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)[d_{P'/P}]$  dans  $D(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}'}^{(\bullet)})$  et donc dans  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}'}^{(\bullet)})$ . Soit  $\chi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  l'élément de  $M$  (voir la définition dans le paragraphe 1.2.1) défini par  $\chi(m) = 1$ . Il suffit alors de vérifier que le morphisme canonique de  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}'}^{(\bullet)}$ -modules

$$\mathcal{O}_{\mathcal{P}'} \otimes_{u^{-1}\mathcal{O}_{\mathcal{P}}} u^{-1}\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T) \rightarrow \chi^*(\mathcal{O}_{\mathcal{P}'} \otimes_{u^{-1}\mathcal{O}_{\mathcal{P}}} u^{-1}\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$$

est le morphisme nul (en d'autres termes,  $\mathcal{O}_{\mathcal{P}'} \otimes_{u^{-1}\mathcal{O}_{\mathcal{P}}} u^{-1}\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$  est annulé par la multiplication par  $p$ ). Comme  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(T)$  ne dépend pas, à isomorphisme canonique près, du choix du relèvement  $f$  d'une équation locale de  $T$  (voir [Ber96b, 4.2.3]), on peut supposer que  $t$  divise  $f$ , i.e. l'image de  $f$  sur  $\mathcal{O}_{\mathcal{P}'}$  est nulle. Dans ce cas, on calcule que  $\mathcal{O}_{\mathcal{P}'} \otimes_{u^{-1}\mathcal{O}_{\mathcal{P}}} u^{-1}\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(T) = \mathcal{O}_{\mathcal{P}'} \otimes_{u^{-1}\mathcal{O}_{\mathcal{P}}} u^{-1}\mathcal{O}_{\mathcal{P}}\{X\}/(f^{p^{m+1}}X - p) = \mathcal{O}_{\mathcal{P}'}\{X\}/(p) = \mathcal{O}_{P'}[X]$ , qui est annulé par  $p$ . D'où le résultat.

2) Supposons maintenant la propriété vraie pour  $r - 1$  et prouvons-la pour  $r$ . Notons  $\mathcal{P}'' := V(t_1)$ . Si  $T \cap P''$  est un diviseur de  $P''$  (resp. si  $T \supset P''$ ), le lemme 5.2.1 (resp. le cas  $r = 1$ ) nous permet de conclure.  $\square$

**Lemme 5.2.7.** Soient  $u: \mathcal{P}' \rightarrow \mathcal{P}$  une immersion fermée de  $\mathcal{V}$ -schémas formels lisses et  $X' \subset P'$  un sous-schéma fermé de  $P'$ . On a alors  $\mathbb{R}\Gamma_{X'}^{\dagger} \circ u^{(\bullet)!}(\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}'}^{(\bullet)})$ .

*Démonstration.* Comme  $P$  et  $P'$  sont lisses, il ne coûte pas cher de les supposer intègres. Dans ce cas, soit  $T \cap P'$  est un diviseur de  $P'$ , soit  $T \supset P'$ . Le premier cas résulte alors des lemmes 4.3.3 et 5.2.1, tandis que le second cas découle du lemme 5.2.6.  $\square$

**Théorème 5.2.8.** Soient  $f: \mathcal{P}' \rightarrow \mathcal{P}$  un morphisme de  $\mathcal{V}$ -schémas formels lisses,  $X$  un sous-schéma fermé de  $P$ ,  $X' := f^{-1}(X)$ ,  $\mathcal{E} \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{qc}}^b({}^s\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)})$  et  $\mathcal{F} \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{qc}}^b({}^s\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}'}^{(\bullet)})$ . On a des isomorphismes fonctoriels en  $X$  et compatibles

à Frobenius :

$$f^! \circ \mathbb{R}\Gamma_X^\dagger(\mathcal{E}^\bullet) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma_{X'}^\dagger \circ f^!(\mathcal{E}^\bullet), \quad f^! \circ (\dagger X)(\mathcal{E}^\bullet) \xrightarrow{\sim} (\dagger Y) \circ f^!(\mathcal{E}^\bullet) \quad (5.2.8.1)$$

$$\mathbb{R}\Gamma_X^\dagger \circ f_+(\mathcal{F}^\bullet) \xrightarrow{\sim} f_+ \circ \mathbb{R}\Gamma_{X'}^\dagger(\mathcal{F}^\bullet), \quad (\dagger X) \circ f_+(\mathcal{F}^\bullet) \xrightarrow{\sim} f_+ \circ (\dagger X')(\mathcal{F}^\bullet). \quad (5.2.8.2)$$

*Démonstration.* Ce théorème a été prouvé en [Car04, 2.2.18]. Nous allons cependant ajouter un petit détail à la preuve : on se ramène comme expliqué dans [Car04, 2.2.18] au cas où  $X$  et  $X'$  sont des diviseurs et où  $f$  est une immersion fermée. Grâce à 5.2.7, les morphismes canoniques  $\mathbb{R}\Gamma_{X'}^\dagger \circ f^! \circ \mathbb{R}\Gamma_X^\dagger(\mathcal{O}_P^\bullet) \rightarrow \mathbb{R}\Gamma_{X'}^\dagger \circ f^!(\mathcal{O}_P^\bullet)$  et  $\mathbb{R}\Gamma_{X'}^\dagger \circ f^! \circ \mathbb{R}\Gamma_X^\dagger(\mathcal{O}_P^\bullet) \rightarrow f^! \circ \mathbb{R}\Gamma_X^\dagger(\mathcal{O}_P^\bullet)$  sont dans  $\underline{LD}_{\mathbb{Q},\text{coh}}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_P^\bullet)$ . Via l'équivalence de catégories de 3.5.5.1 de la forme  $\varinjlim : \underline{LD}_{\mathbb{Q},\text{coh}}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_P^\bullet(T)) \cong D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_P^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}})$ , pour vérifier que ce sont des isomorphismes, il suffit de le valider après application de ce foncteur  $\varinjlim$  pleinement fidèle, ce qui sont les lemmes [Car04, 2.2.19 et 2.2.20].  $\square$

**5.2.9** (On peut oublier les diviseurs). Soient  $f: \mathcal{P}' \rightarrow \mathcal{P}$  un morphisme de  $\mathcal{V}$ -schémas formels lisses,  $T$  et  $T'$  des diviseurs respectifs de  $P$  et  $P'$  tels que  $f(P' \setminus T') \subset P \setminus T$ .

1. Soit  $\mathcal{E}'^\bullet \in \underline{LD}_{\mathbb{Q},\text{qc}}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_{P'}^\bullet(T'))$ . Rappelons que d'après [Car06, 1.1.9], on vérifie de manière élémentaire que l'on dispose de l'isomorphisme canonique  $\text{oub}_T \circ f_{T,T',+}^{(\bullet)}(\mathcal{E}'^\bullet) \xrightarrow{\sim} f_+^{(\bullet)} \circ \text{oub}_{T'}(\mathcal{E}'^\bullet)$ . On notera alors simplement  $f_+^{(\bullet)}$  à la place de  $f_{T,T',+}^{(\bullet)}$ .

D'après la remarque 3.5.6, les foncteurs  $\text{Coh}_{T'}(f_{T,T',+}^{(\bullet)})$  et  $\text{Coh}(f_+^{(\bullet)})$  (on n'indique pas dans les notations l'ensemble vide par convention) sont isomorphes sur  $D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{P',\mathbb{Q}}^\dagger) \cap D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_P^\dagger(\dagger T')_{\mathbb{Q}})$ . Or, on a vu dans le paragraphe 5.1.5 que l'on dispose de l'isomorphisme de foncteurs  $\text{Coh}_{T'}(f_{T,T',+}^{(\bullet)}) \xrightarrow{\sim} f_{T,T',+}$  et  $\text{Coh}(f_+^{(\bullet)}) \xrightarrow{\sim} f_+$ . On pourra alors noter sans risque de confusion  $f_+$  à la place de  $f_{T,T',+}$ .

2. Supposons  $T' = f^{-1}(T)$  et soit  $\mathcal{E}^\bullet \in \underline{LD}_{\mathbb{Q},\text{qc}}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_P^\bullet)$ . D'après [Car06, 1.1.10], on déduit du théorème [Car04, 2.2.18] (i.e. le théorème 5.2.8 ci-dessus), que l'on bénéficie de l'isomorphisme canonique  $\text{oub}_{T'} \circ f_T^{(\bullet)!}(\mathcal{E}^\bullet) \xrightarrow{\sim} f^{(\bullet)!} \circ \text{oub}_T(\mathcal{E}^\bullet)$ . On notera alors simplement  $f^{(\bullet)!}$  à la place de  $f_T^{(\bullet)!}$ . Pour les raisons identiques au cas de l'image directe, on pourra aussi noter simplement  $f^!$  à la place de  $f_T^!$ .

### 5.3 Surcohérence dans un $\mathcal{V}$ -schéma formel lisse, stabilité par image inverse extraordinaire par une immersion fermée

**Définition 5.3.1.** Soit  $\mathcal{E}^\bullet \in \underline{LD}_{\mathbb{Q},\text{coh}}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_P^\bullet(T))$ . On dit que  $\mathcal{E}^\bullet$  est surcohérent dans  $\mathcal{P}$  si, pour tout diviseur  $T'$  de  $P$ ,  $(\dagger T')(\mathcal{E}^\bullet) \in \underline{LD}_{\mathbb{Q},\text{coh}}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_P^\bullet(T))$  (rappelons que d'après 3.5.8, le foncteur  $(\dagger T')$  s'identifie au foncteur  $(\dagger T', T)$ ). On note  $\underline{LD}_{\mathbb{Q},\text{surcoh},\mathcal{P}}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_P^\bullet(T))$  la sous-catégorie pleine de  $\underline{LD}_{\mathbb{Q},\text{coh}}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_P^\bullet(T))$  des modules surcohérents dans  $\mathcal{P}$ .

De même, on note  $D_{\text{surcoh},\mathcal{P}}^b(\mathcal{D}_P^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}})$  la sous-catégorie pleine de  $D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_P^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}})$  des complexes  $\mathcal{E}$  tels que pour tout diviseur  $T'$  de  $P$ , on ait  $(\dagger T')(\mathcal{E}) \in D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_P^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}})$ .

**Proposition 5.3.2.** Soit  $\mathcal{E}^\bullet \in \underline{LD}_{\mathbb{Q},\text{coh}}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_P^\bullet(T))$ . La propriété  $\mathcal{E}^\bullet \in \underline{LD}_{\mathbb{Q},\text{surcoh},\mathcal{P}}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_P^\bullet(T))$  est équivalence à la propriété  $\varinjlim \mathcal{E}^\bullet \in D_{\text{surcoh},\mathcal{P}}^b(\mathcal{D}_P^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}})$ . Ces deux propriétés sont locales en  $\mathcal{P}$  et le foncteur  $\varinjlim$  se factorise en l'équivalence de catégories de la forme  $\varinjlim : \underline{LD}_{\mathbb{Q},\text{surcoh},\mathcal{P}}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_P^\bullet(T)) \cong D_{\text{surcoh},\mathcal{P}}^b(\mathcal{D}_P^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}})$ .

*Démonstration.* Soit  $T'$  un diviseur de  $P$ . Comme  $\varinjlim \circ (\dagger T')(\mathcal{E}^\bullet) \xrightarrow[3.2.8]{\sim} \varinjlim \circ (\dagger T' \cup T)(\mathcal{E}^\bullet) \xrightarrow{\sim} (\dagger T' \cup T, T) \circ \varinjlim(\mathcal{E}^\bullet)$ , il suffit d'appliquer le corollaire 3.5.2 au complexe  $\mathcal{E}'^\bullet := (\dagger T')(\mathcal{E}^\bullet)$ .  $\square$

**Lemme 5.3.3.** Soit  $\mathcal{E}^\bullet \in \underline{LD}_{\mathbb{Q},\text{coh}}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_P^\bullet(T))$ . L'objet  $\mathcal{E}^\bullet$  appartient à  $\underline{LD}_{\mathbb{Q},\text{surcoh},\mathcal{P}}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_P^\bullet(T))$  si et seulement si, pour tout sous-schéma fermé  $Z$  de  $P$ , les objets de  $(\dagger Z)(\mathcal{E}^\bullet)$  et  $\mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger(\mathcal{E}^\bullet)$  sont dans  $\underline{LD}_{\mathbb{Q},\text{surcoh},\mathcal{P}}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_P^\bullet(T))$ .

*Démonstration.* On procède par dévissage de manière identique à 4.3.3.  $\square$

**Lemme 5.3.4.** *Soit  $\mathfrak{X} \hookrightarrow \mathcal{P}$  une immersion fermée de  $\mathcal{V}$ -schémas formels séparé et lisses tel que  $T \cap X$  soit un diviseur de  $X$ . On dispose des carrés commutatifs à isomorphisme canonique :*

$$\begin{array}{ccccccc} LD_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(\bullet)}(T \cap X)) & \xrightarrow{u_+^{(\bullet)}} & LD_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) & \xrightarrow{LD_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^0(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(\bullet)}(T \cap X))} & LD_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^0(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) & (5.3.4.1) \\ \cong \downarrow \lim & & \cong \downarrow \lim & & \cong \downarrow \lim & & \cong \downarrow \lim \\ D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T \cap X)_{\mathbb{Q}}) & \xrightarrow{u_{T+}} & D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}) & , & D_{\text{coh}}^0(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T \cap X)_{\mathbb{Q}}) & \xrightarrow{u_{T+}} & D_{\text{coh}}^0(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}). \end{array}$$

*Démonstration.* Comme  $u$  est en particulier propre, d'après [Ber02, 4.3.7-8], on obtient alors la commutativité à isomorphisme canonique du carré de gauche. Comme le foncteur  $u_{T+} : \text{Coh}(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T \cap X)_{\mathbb{Q}}) \rightarrow \text{Coh}(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}})$  est exact, on obtient la factorisation  $D_{\text{coh}}^0(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T \cap X)_{\mathbb{Q}}) \rightarrow D_{\text{coh}}^0(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}})$ . On obtient alors le diagramme commutatif à isomorphisme canonique près identique à celui de droite de 5.3.4.1 où le symbole « 0 » du terme en haut à droite est remplacé par « b ». Grâce à 2.5.7.1, on en déduit la factorisation  $u_+^{(\bullet)} : LD_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^0(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(\bullet)}(T \cap X)) \rightarrow LD_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^0(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  voulue.  $\square$

**Théorème 5.3.5** (Version système inductif du théorème de Berthelot-Kashiwara). *Soient  $u : \mathfrak{X} \hookrightarrow \mathcal{P}$  une immersion fermée de  $\mathcal{V}$ -schémas formels lisses,  $\mathfrak{U}$  l'ouvert de  $\mathcal{P}$  complémentaire de  $u(X)$ ,  $T$  un diviseur de  $P$  tel que  $T \cap X$  soit un diviseur de  $X$ . Soient  $\mathcal{F}^{(\bullet)} \in LD_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b({}^{\mathfrak{g}}\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(\bullet)}(T \cap X))$ ,  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \in LD_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b({}^{\mathfrak{g}}\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  tel que  $\mathcal{E}^{(\bullet)}|_{\mathfrak{U}} \xrightarrow{\sim} 0$  dans  $LD_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b({}^{\mathfrak{g}}\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ .*

1. *On dispose de l'isomorphisme canonique dans  $LD_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b({}^{\mathfrak{g}}\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(\bullet)}(T \cap X))$  :*

$$u^{(\bullet)!} \circ u_+^{(\bullet)}(\mathcal{F}^{(\bullet)}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}^{(\bullet)}. \quad (5.3.5.1)$$

2. *On a  $u^{(\bullet)!}(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \in LD_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b({}^{\mathfrak{g}}\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(\bullet)}(T \cap X))$  et l'on bénéficie de l'isomorphisme canonique*

$$u_+^{(\bullet)} \circ u^{(\bullet)!}(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}^{(\bullet)}. \quad (5.3.5.2)$$

3. *Les foncteurs  $u_+^{(\bullet)}$  et  $u^{(\bullet)!}$  induisent des équivalences quasi-inverses entre la catégorie  $LD_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b({}^{\mathfrak{g}}\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(\bullet)}(T \cap X))$  (resp.  $LD_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^0({}^{\mathfrak{g}}\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(\bullet)}(T \cap X))$ ) et la sous-catégorie pleine de  $LD_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b({}^{\mathfrak{g}}\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  (resp.  $LD_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^0({}^{\mathfrak{g}}\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ ) des complexes  $\mathcal{E}^{(\bullet)}$  tels que  $\mathcal{E}^{(\bullet)}|_{\mathfrak{U}} \xrightarrow{\sim} 0$ .*

*Démonstration.* Vérifions dans un premier temps l'isomorphisme 5.3.5.1. On dispose du morphisme canonique d'adjonction  $u^{(\bullet)!} \circ u_+^{(\bullet)}(\mathcal{F}^{(\bullet)}) \rightarrow \mathcal{F}^{(\bullet)}$ . Il s'agit de vérifier que cette flèche est un isomorphisme. D'après la proposition 1.3.3, cela est local. Par transitivité des morphismes d'adjonction, on se ramène alors au cas où  $P$  est muni de coordonnées locales  $t_1, \dots, t_d$  telles que  $X = V(t_1)$ . Dans ce cas, on déduit de 5.2.5 que, pour tout entier  $l \notin \{0, 1\}$ , on a  $\mathcal{H}^l u^{(\bullet)!} = 0$  sur  $LD_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b({}^{\mathfrak{g}}\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . Comme le foncteur  $u_+^{(\bullet)}$  préserve la cohérence et est exact, le foncteur  $u^{(\bullet)!} \circ u_+^{(\bullet)}$  est donc *way-out* à gauche (cela a un sens grâce à l'équivalence de catégories  $LD_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(\bullet)}(T \cap X)) \cong D_{\text{coh}}^b(LM_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(\bullet)}(T \cap X)))$  de 2.5.5.1). En recopiant le début de la preuve de 2.4.3, on se ramène alors au cas où  $\mathcal{F}^{(\bullet)} = \lambda^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(\bullet)}(T \cap X)$ , pour un certain  $\lambda \in L$ . On dispose de l'isomorphisme canonique  $\mathcal{H}^0 u^{(m)!} \circ u_+^{(m)}(\mathcal{F}^{(m)}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}^{(m)}$  (calcul classique, voir par exemple [Car11]). De plus, via la formule [Ber96b, 2.2.4.(iv)], on calcule que la flèche canonique  $\mathcal{H}^1 u^{(m)!} \circ u_+^{(m)}(\mathcal{F}^{(m)}) \rightarrow \mathcal{H}^1 u^{(m+1)!} \circ u_+^{(m+1)}(\mathcal{F}^{(m+1)})$  est le morphisme nul (grâce à 5.2.3,  $\mathcal{H}^1 u^{(m)!} = \mathcal{H}^1 u^{(m+1)!} = u^*$  car le module est cohérent). On en déduit le résultat.

Vérifions maintenant 5.3.5.2. Posons  $\mathcal{E} := \varinjlim \mathcal{E}^{(\bullet)}$ . D'après le théorème de Berthelot-Kashiwara, comme  $\mathcal{E} \in D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}})$  et est à support dans  $X$ , alors  $u^!(\mathcal{E}) \in D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T \cap X)_{\mathbb{Q}})$ . Soit  $\mathcal{H}^{(\bullet)} \in LD_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b({}^{\mathfrak{g}}\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(\bullet)}(T \cap X))$  tel que



$u^!(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \varinjlim \mathcal{H}(\bullet)$ . Via 5.3.4, on en déduit  $u_+(u^!(\mathcal{E})) \xrightarrow{\sim} \varinjlim u_+^{(\bullet)} \mathcal{H}(\bullet)$ . Comme d'après le théorème de Berthelot-Kashiwara  $\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} u_+(u^!(\mathcal{E}))$ , comme  $\mathcal{E}(\bullet)$ ,  $u_+^{(\bullet)} \mathcal{H}(\bullet) \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b({}^g\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  et comme le foncteur  $\varinjlim$  est pleinement fidèle sur  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b({}^g\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ , on en déduit  $\mathcal{E}(\bullet) \xrightarrow{\sim} u_+^{(\bullet)} \mathcal{H}(\bullet)$ . Cela entraîne  $u^{(\bullet)!}(\mathcal{E}(\bullet)) \xrightarrow{\sim} u^{(\bullet)!} \circ u_+^{(\bullet)} \mathcal{H}(\bullet) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}(\bullet)$ . 5.3.5.1

En appliquant le foncteur  $u_+^{(\bullet)}$  à ce composé, on obtient l'isomorphisme 5.3.5.2 voulu. Le troisième point est évident une fois validés les deux premiers.  $\square$

**Corollaire 5.3.6.** Soient  $u: \mathcal{X} \hookrightarrow \mathcal{P}$  une immersion fermée de  $\mathcal{V}$ -schémas formels lisses,  $T$  un diviseur de  $P$  tel que  $T \cap X$  soit un diviseur de  $X$ .

1. Pour tout complexe  $\mathcal{E}(\bullet) \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{surcoh}, \mathcal{P}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ , on a alors  $u^{(\bullet)!}(\mathcal{E}(\bullet)) \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{surcoh}, \mathcal{X}}^b({}^g\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(\bullet)}(T \cap X))$ .
2. Les équivalences quasi-inverses de 5.3.5.3 restent valables en remplaçant l'indice « coh » par respectivement l'indice « surcoh,  $\mathcal{P}$  » ou « surcoh,  $\mathcal{X}$  »

*Démonstration.* Soient  $\mathcal{E}(\bullet) \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{surcoh}, \mathcal{P}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  et  $X'$  une sous-variété fermée de  $X$ . Il résulte de 5.3.3 que  $\mathbb{R}\Gamma_{X'}^{\dagger}(\mathcal{E}(\bullet)) \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{surcoh}, \mathcal{P}}^b({}^g\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . Comme ce dernier est en particulier cohérent et nul en dehors de  $X$ , on déduit du théorème 5.3.5 que  $u^{(\bullet)!}(\mathbb{R}\Gamma_{X'}^{\dagger}(\mathcal{E}(\bullet))) \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b({}^g\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(\bullet)}(T \cap X))$ . Or, il découle de 5.2.8.1, que l'on dispose de l'isomorphisme canonique  $u^{(\bullet)!} \circ \mathbb{R}\Gamma_{X'}^{\dagger}(\mathcal{E}(\bullet)) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma_{X'}^{\dagger} \circ u^{(\bullet)!}(\mathcal{E}(\bullet))$ . Cela implique  $u^{(\bullet)!}(\mathcal{E}(\bullet)) \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{surcoh}, \mathcal{X}}^b({}^g\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(\bullet)}(T \cap X))$  (il ne faut pas oublier de d'abord vérifier la cohérence, ce qui résulte du cas particulier  $X' = X$  car dans ce cas  $\mathbb{R}\Gamma_{X'}^{\dagger} \circ u^{(\bullet)!} = u^{(\bullet)!}$ ).  $\square$

**5.3.7.** Soient  $u: \mathcal{X} \hookrightarrow \mathcal{P}$  une immersion fermée de  $\mathcal{V}$ -schémas formels lisses,  $T$  un diviseur de  $P$  tel que  $T \cap X$  soit un diviseur de  $X$ . On dispose alors de l'isomorphisme

$$\mathbb{R}\Gamma_X^{\dagger}(\mathcal{E}(\bullet)) \xrightarrow{\sim} u_+^{(\bullet)} \circ u^{(\bullet)!}(\mathcal{E}(\bullet)). \quad (5.3.7.1)$$

Rappelons avec un peu plus de détails sa preuve donnée dans [Car09, 1.15.10] : en utilisant les isomorphismes

$$u_+^{(\bullet)}(\mathcal{O}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}, \mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}} \mathcal{E}(\bullet)[d_{X/P}] \xrightarrow[\text{[Car04, 2.1.4]}]{\sim} u_+^{(\bullet)}(\mathcal{O}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}, \mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}} u^{(\bullet)!}(\mathcal{E}(\bullet))) \xrightarrow{\sim} u_+^{(\bullet)} \circ u^{(\bullet)!}(\mathcal{E}(\bullet)),$$

on se ramène au cas où  $\mathcal{E}(\bullet) = \mathcal{O}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}$ . Dans ce cas, comme  $\mathbb{R}\Gamma_X^{\dagger}(\mathcal{O}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}) \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b({}^g\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  (voir 5.2.7) et est à support dans  $X$ , le théorème de Kashiwara sous la forme 5.3.5 implique que l'on dispose de l'isomorphisme canonique  $u_+^{(\bullet)} \circ u^{(\bullet)!}(\mathbb{R}\Gamma_X^{\dagger}(\mathcal{O}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)})) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma_X^{\dagger}(\mathcal{O}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)})$ . Comme d'après 5.2.8.1 le morphisme canonique  $u^{(\bullet)!}(\mathbb{R}\Gamma_X^{\dagger}(\mathcal{O}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)})) \rightarrow u^{(\bullet)!}(\mathcal{O}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)})$  est un isomorphisme, on obtient le résultat voulu.

## 5.4 Surcohérence

**Définition 5.4.1.** 1. On avait défini dans [Car04, 3], la sous-catégorie pleine  $D_{\text{surcoh}}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}})$  de  $D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}})$  des complexes surcohérents  $\mathcal{E}$ , i.e., tels que, pour tout morphisme lisse de la forme  $f: \mathcal{P}' \rightarrow \mathcal{P}$ , on ait  $f^!(\mathcal{E}) \in D_{\text{surcoh}, \mathcal{P}'}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{P}'}^{\dagger}(\dagger f^{-1}(T))_{\mathbb{Q}})$ .

2. De manière analogue, on dit que  $\mathcal{E}(\bullet) \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  est surcohérent si, pour tout morphisme lisse de la forme  $f: \mathcal{P}' \rightarrow \mathcal{P}$ , on ait  $f^{(\bullet)!}(\mathcal{E}(\bullet)) \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{surcoh}, \mathcal{P}'}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}'}^{(\bullet)}(f^{-1}(T)))$ . On note  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{surcoh}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  la sous-catégorie pleine de  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  des modules surcohérents.

**Proposition 5.4.2.** Soit  $\mathcal{E}(\bullet) \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . La propriété  $\mathcal{E}(\bullet) \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{surcoh}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  est équivalence à la propriété  $\varinjlim \mathcal{E}(\bullet) \in D_{\text{surcoh}}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}})$ . Ces deux propriétés sont locales en  $\mathcal{P}$ . On dispose de l'équivalence de catégories  $\varinjlim: \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{surcoh}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \cong D_{\text{surcoh}}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}})$ .

*Démonstration.* Cela résulte de la proposition 5.3.2 et du fait que, pour tout morphisme lisse  $f$  de  $\mathcal{V}$ -schémas formels lisses, le foncteur  $f^{(\bullet)!}$  préserve la cohérence.  $\square$

**Théorème 5.4.3.** *Soient  $f: \mathcal{P}' \rightarrow \mathcal{P}$  un morphisme de  $\mathcal{V}$ -schémas formels lisses,  $T$  un diviseur de  $\mathcal{P}$  tel que  $T' := f^{-1}(T)$  soit un diviseur de  $\mathcal{P}'$ . Pour tout  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{surcoh}}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ , on a alors  $f^{(\bullet)!}(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{surcoh}}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}'}^{(\bullet)}(T'))$ .*

*Démonstration.* Il s'agit de calquer la preuve du théorème analogue de [Car04, 3.1.7].  $\square$

T. Abe a prouvé le théorème de changement de base suivant : [Abe10, 5.7]

**Théorème 5.4.4** (T. Abe). *Soient  $f: \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$ ,  $g: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$  deux morphismes de  $\mathcal{V}$ -schémas formels lisses tels que  $\mathcal{Y}' := \mathcal{X}' \times_{\mathcal{X}} \mathcal{Y}$  soit un  $\mathcal{V}$ -schéma formel lisse. On suppose  $f$  quasi-compact et quasi-séparé. On note  $f': \mathcal{Y}' \rightarrow \mathcal{Y}$  et  $g': \mathcal{Y}' \rightarrow \mathcal{X}'$  les deux projections. Soit  $\mathcal{E}'^{(\bullet)} \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{qc}}^b({}^g\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}'}^{(\bullet)})$ . Il existe alors un isomorphisme canonique compatible à Frobenius :*

$$g^{(\bullet)!} \circ f_+^{(\bullet)}(\mathcal{E}'^{(\bullet)}) \xrightarrow{\sim} f'_+^{(\bullet)} \circ g'^{(\bullet)!}(\mathcal{E}'^{(\bullet)}). \quad (5.4.4.1)$$

*Remarques 5.4.5.* Avec les notations 5.4.4 ci-dessus, si on oublie la structure de Frobenius, on peut prouver le théorème 5.4.4 ci-dessus de la manière suivante. Quitte à décomposer  $f$  en  $\mathcal{X}' \hookrightarrow \mathcal{X}' \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ , on se ramène au cas où  $f$  est une immersion fermée ou une immersion ouverte ou une projection  $\mathcal{Z} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ . Et de même pour  $g$ . Les cas où  $f$  ou  $g$  sont des immersions fermées ou ouvertes résultent aussitôt de [Car04, 2.2.18]. On se ramène donc à traiter le cas où  $f: \mathcal{Z} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  et  $g: \mathcal{Z}' \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  sont les projections canoniques. Ainsi,  $\mathcal{Y}' = \mathcal{Z} \times \mathcal{Z}' \times \mathcal{X}$  et  $f': \mathcal{Z} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$ ,  $g': \mathcal{Z}' \times \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}'$  sont les projections canoniques. Dans ce cas, de manière analogue à [Ber02, 2.4.2], pour tout entier  $i \in \mathbb{N}$ , on vérifie que l'on dispose dans  $D_{\text{qc}}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{Y}_i}^{(m)})$  de l'isomorphisme canonique

$$g_i^{(m)!} \circ f_{i+}^{(m)}(\mathcal{E}_i'^{(m)}) \rightarrow f_{i+}'^{(m)} \circ g_i'^{(m)!}(\mathcal{E}_i'^{(m)}). \quad (5.4.5.1)$$

D'où le résultat par passage à la limite projective et compatibilité au changement de niveaux de ces isomorphismes 5.4.5.1.

**Théorème 5.4.6.** *Soient  $f: \mathcal{P}' \rightarrow \mathcal{P}$  un morphisme propre de  $\mathcal{V}$ -schémas formels lisses,  $T$  un diviseur de  $\mathcal{P}$  tel que  $T' := f^{-1}(T)$  soit un diviseur de  $\mathcal{P}'$ . Pour tout  $\mathcal{E}'^{(\bullet)} \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{surcoh}}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}'}^{(\bullet)}(T'))$ , on a alors  $f_+^{(\bullet)}(\mathcal{E}'^{(\bullet)}) \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{surcoh}}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ .*

*Démonstration.* Il s'agit de calquer la preuve du théorème analogue de [Car04, 3.1.9], i.e. cela découle du théorème 5.4.3 et du théorème de changement de base 5.4.4.  $\square$

*Remarques 5.4.7.* Soit  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{qc}}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . Si  $\varinjlim \mathcal{E}^{(\bullet)} \in D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}})$ , il semble faux que cela implique que  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . La stabilité de la surcohérence par images directes ou images inverses extraordinaires pour les systèmes inductifs est donc un résultat plus fort que les propriétés de stabilité de [Car04].

## 5.5 Calcul direct de la cohérence du coefficient constant avec singularités surconvergentes pour les systèmes inductifs

On propose ci-dessous une vérification à la main (notamment lorsque le diviseur  $T$  est lisse) du théorème 3.5.3 ci-dessus. On pourra comparer avec [Ber96a]. Nous aurons d'abord besoin du lemme que l'on peut vérifier sans utiliser 3.5.2 :

**Lemme 5.5.1.** *Soient  $T' \supset T$  un diviseur,  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T'))$  et  $\mathcal{G}^{(\bullet)} \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \cap \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{qc}}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T'))$ . Si  $\varinjlim(\mathcal{E}^{(\bullet)})$  est un facteur direct de  $\varinjlim(\mathcal{G}^{(\bullet)})$  dans  $D^b(\mathcal{D}_{\mathcal{P}, \mathbb{Q}}^{\dagger})$ , alors  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ .*

*Démonstration.* Comme  $\mathcal{E} := \varinjlim \mathcal{E}^{(\bullet)}$  est un facteur direct de  $\mathcal{G} := \varinjlim \mathcal{G}^{(\bullet)}$  dans  $D^b(\mathcal{D}_{\mathcal{P}, \mathbb{Q}}^{\dagger})$ , comme  $\mathcal{G} \in D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}})$ , on obtient alors  $\mathcal{E} \in D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}})$ . Comme le foncteur  $\varinjlim$  est une équivalence de catégories sur les complexes cohérents et à cohomologie bornée, il existe  $\mathcal{H}^{(\bullet)}, \mathcal{F}^{(\bullet)} \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$  tels que  $\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \varinjlim \mathcal{H}^{(\bullet)}$  et  $\mathcal{H}^{(\bullet)} \oplus \mathcal{F}^{(\bullet)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}^{(\bullet)}$  dans  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . Comme  $\mathcal{G}^{(\bullet)} \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{qc}}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T'))$ , on en déduit que le morphisme canonique  $\mathcal{H}^{(\bullet)} \oplus \mathcal{F}^{(\bullet)} \rightarrow$

$({}^\dagger T')(\mathcal{H}^{(\bullet)} \oplus \mathcal{F}^{(\bullet)}) = ({}^\dagger T')(\mathcal{H}^{(\bullet)}) \oplus ({}^\dagger T')(\mathcal{F}^{(\bullet)})$  est un isomorphisme. Il en résulte que le morphisme canonique  $\mathcal{H}^{(\bullet)} \rightarrow ({}^\dagger T')(\mathcal{H}^{(\bullet)})$  est un isomorphisme. Or,  $\varinjlim ({}^\dagger T')(\mathcal{H}^{(\bullet)}) \xrightarrow{\sim} ({}^\dagger T')\varinjlim (\mathcal{H}^{(\bullet)}) \xrightarrow{\sim} ({}^\dagger T')(\mathcal{E})$ . De plus, comme  $\mathcal{E} \in D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^\dagger({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}) \cap D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^\dagger({}^\dagger T')_{\mathbb{Q}})$ , le morphisme canonique  $({}^\dagger T')(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}$  est un isomorphisme (grâce à [Ber96b, 4.3.12]). Par pleine fidélité de  $\varinjlim$  sur  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T'))$ , on en déduit que  $({}^\dagger T')(\mathcal{H}^{(\bullet)}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}^{(\bullet)}$ . D'où le résultat.  $\square$

**Théorème 5.5.2.** *On a  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T) \in \underline{LM}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}) \cap \underline{LM}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ .*

*Démonstration.* Il est immédiat que  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T) \in \underline{LM}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . Vérifions à présent  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T) \in \underline{LM}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)})$ .

*Étape I.* Supposons dans un premier temps  $T$  lisse. D'après 2.5.6, Comme le résultat à vérifier est local, on peut supposer  $\mathcal{P}$  affine et muni de coordonnées locales  $t_1, \dots, t_d$  telles que  $T = V(\bar{t}_1)$ , où  $\bar{t}_1 \in \mathcal{O}_{\mathcal{P}}$  désigne la réduction de  $t_1$  modulo  $\pi\mathcal{O}_{\mathcal{P}}$ . Pour tout entier  $m \geq 0$ , notons  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(*T) := \frac{1}{p}\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(T) \subset \mathcal{O}_{\mathcal{P}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$  (pour l'injection, voir [Ber96b, 4.3.3]). Comme  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(T)$  est un sous- $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(m)}$ -module de  $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$  (voir [Ber96b, 4.2.4]), il en est de même de  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(*T)$ . Comme  $\frac{1}{t_1} \in \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(*T)$ , on dispose donc de l'application canonique  $\phi: \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(m)} \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(*T)$  définie par la formule  $\phi(P) = P \cdot (\frac{1}{t_1})$ . Notons  $\mathcal{I}$  l'idéal à gauche de  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(m)}$  engendré par  $\partial_1 t_1$  et  $\partial_2, \dots, \partial_d$  et  $\mathcal{F}^{(m)} := (\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(m)}/\mathcal{I})/(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(m)}/\mathcal{I})_{p\text{-tors}}$ . Comme les éléments de  $\mathcal{I}$  agissent de manière triviale sur  $\frac{1}{t_1}$ , comme  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(*T)$  est sans  $p$ -torsion, le morphisme  $\phi$  se factorise en la flèche  $\mathcal{F}^{(m)} \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(*T)$ . On remarque que comme  $\mathcal{F}_{\mathbb{Q}}^{(m)} = \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}, \mathbb{Q}}^{(m)}/\mathcal{I}_{\mathbb{Q}} \subset \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(T)_{\mathbb{Q}}$  (voir [Ber90, 3.2.1.(i) et 4.2.2]), alors  $\mathcal{F}^{(m)} \subset \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(*T)$ . On peut donc identifier les éléments de  $\mathcal{F}^{(m)}$  avec les éléments  $f$  de  $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$  tel qu'il existe  $P \in \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(m)}$  tel que  $f = P \cdot (\frac{1}{t_1})$ .

Vérifions à présent que  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(T) \subset \mathcal{F}^{(m+1)}$ . Soit  $f \in \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(m)}(T)$ . On a  $f = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k \frac{p^k}{t_1^{kp^{m+1}-1}}$  où  $a_k \in \mathcal{O}_{\mathcal{P}}$  converge vers 0 pour la topologie  $p$ -adique lorsque  $k$  tend vers l'infini. Soit  $P = \sum_{k \geq 0} (-1)^k a_k p^k \partial_1^{[kp^{m+1}-1]} \in \mathcal{D}_{\mathcal{P}}^\dagger$ . On calcule alors dans  $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$  la formule  $f = P \cdot (\frac{1}{t_1})$ . Il suffit alors de vérifier que l'on a en fait  $P \in \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(m+1)}$ . Posons  $kp^{m+1} - 1 = p^{m+1}q_k + r_k$  avec  $0 \leq r_k < p^{m+1}$ . On a alors  $\partial_1^{[kp^{m+1}-1]} = \frac{1}{q_k!} \partial_1^{<kp^{m+1}-1>_{(m+1)}}$  (voir la formule [Ber96b, 2.2.3.2]). Donc  $P = \sum_{k \geq 0} (-1)^k a_k \frac{p^k}{q_k!} \partial_1^{<kp^{m+1}-1>_{(m+1)}}$ . D'après [Ber96b, 2.4.3.1] (cette formule est utilisée au niveau  $m+1$ ),  $v_p(q_k!) \leq \frac{kp^{m+1}-1}{p^{m+1}(p-1)} \leq \frac{k}{(p-1)} \leq k$ . D'où  $P \in \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(m+1)}$ .

On en déduit que  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)$  et  $\mathcal{F}^{(\bullet)}$  sont isomorphes dans  $\underline{LM}_{\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)})$ .

*Étape II.* Supposons à présent que  $T$  soit un diviseur à croisements normaux. On peut supposer  $\mathcal{P}$  affine et muni de coordonnées locales  $t_1, \dots, t_d$  telles que  $T = V(\bar{t}_1 \cdots \bar{t}_r)$ , où  $\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_r \in \mathcal{O}_{\mathcal{P}}$  désignent respectivement la réduction de  $t_1, \dots, t_r$  modulo  $\pi\mathcal{O}_{\mathcal{P}}$ . On procède alors par récurrence sur  $r$ , i.e. le nombre de composante irréductible de  $T$ . Notons  $\mathcal{X} = V(t_1)$ ,  $u: \mathcal{X} \hookrightarrow \mathcal{P}$  l'immersion fermée canonique et  $T' = V(\bar{t}_1 \cdots \bar{t}_{r-1})$ .

Comme d'après le lemme 5.2.1  $u^{(\bullet)!}(\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T'))[1] \xrightarrow{\sim} \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(\bullet)}(X \cap T')$ , comme d'après 3.2.8  $({}^\dagger X)(\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T')) \xrightarrow{\sim} \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(X \cup T')$ , avec l'isomorphisme 5.3.7.1, le triangle de localisation de  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T')$  par rapport à  $X$  donne la suite exacte courte :

$$0 \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T') \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T) \rightarrow u_+^{(\bullet)}(\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(\bullet)}(T' \cap X)) \rightarrow 0. \quad (5.5.2.1)$$

Comme  $T' \cap X$  est un diviseur à croisements normaux de  $X$  avec  $r-1$  composantes irréductibles, comme la cohérence est préservée par le foncteur  $u_+^{(\bullet)}$ , on conclut alors par hypothèse de récurrence.

*Étape III. Cas général.* Il résulte du théorème de désingularisation de de Jong qu'il existe un morphisme de cadres de la forme  $\alpha = (f, g, h): (\tilde{\mathcal{P}}, \tilde{T}, \tilde{X}, \tilde{Y}) \rightarrow (\mathcal{P}, T, P, Y)$  tel que  $\tilde{X}$  soit lisse,  $\tilde{T} = f^{-1}(T)$  et  $\tilde{T} \cap \tilde{X}$  soit un diviseur à croisements normaux de  $\tilde{X}$ ,  $f$  soit un morphisme propre et lisse de  $\mathcal{V}$ -schémas formels séparés et lisses,  $g$  soit un morphisme propre, surjectif, génériquement fini et étale de  $k$ -variétés. Posons  $\tilde{\mathcal{E}}^{(\bullet)} := \mathbb{R}\Gamma_{\tilde{X}}^\dagger f^{(\bullet)!}(\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ . Prouvons que  $\tilde{\mathcal{E}}^{(\bullet)} \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^0(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}) \cap \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^0(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(\tilde{T}))$ . D'après 2.5.6, comme cela est local en  $\tilde{\mathcal{P}}$ , on peut supposer qu'il existe une immersion fermée de  $\mathcal{V}$ -schémas formels lisses  $u: \tilde{\mathcal{X}} \hookrightarrow \tilde{\mathcal{P}}$  qui relève  $\tilde{X} \hookrightarrow \tilde{\mathcal{P}}$ . Dans ce cas, avec 5.3.7.1 puis 5.2.1, on obtient les isomorphismes  $\tilde{\mathcal{E}}^{(\bullet)} \xrightarrow{\sim} u_+^{(\bullet)} \circ u^{(\bullet)!} \circ f^{(\bullet)!}(\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \xrightarrow{\sim} u_+^{(\bullet)}(\tilde{\mathcal{B}}_{\tilde{\mathcal{X}}}^{(\bullet)}(\tilde{T} \cap \tilde{\mathcal{X}}))$ . D'après l'étape II, on sait

$\tilde{\mathcal{B}}_{\tilde{\mathfrak{X}}}^{(\bullet)}(\tilde{T} \cap \tilde{\mathfrak{X}}) \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^0(\tilde{\mathcal{D}}_{\tilde{\mathfrak{X}}}^{(\bullet)}) \cap \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^0(\tilde{\mathcal{D}}_{\tilde{\mathfrak{X}}}^{(\bullet)}(\tilde{T} \cap \tilde{\mathfrak{X}}))$ . Via la factorisation de  $u_+^{(\bullet)}$  du carré de droite de 5.3.4.1, on en déduit  $\tilde{\mathcal{E}}^{(\bullet)} \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^0(\tilde{\mathcal{D}}_{\tilde{\mathfrak{P}}}^{(\bullet)}) \cap \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^0(\tilde{\mathcal{D}}_{\tilde{\mathfrak{P}}}^{(\bullet)}(\tilde{T}))$ .

Notons  $\tilde{\mathcal{E}} := \varinjlim (\tilde{\mathcal{E}}^{(\bullet)})$ . Comme  $f$  est propre, alors  $f_+^{(\bullet)}(\tilde{\mathcal{E}}^{(\bullet)}) \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{P}}^{(\bullet)}) \cap \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{P}}^{(\bullet)}(T))$ . On en déduit  $f_+(\tilde{\mathcal{E}}) \xrightarrow{\sim} \varinjlim (f_+^{(\bullet)}(\tilde{\mathcal{E}}^{(\bullet)})) \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{P}}^{(\bullet)})$ . Comme  $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$  est un facteur direct de  $f_+(\tilde{\mathcal{E}})$ , par pleine fidélité du foncteur  $\varinjlim : \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{P}}^{(\bullet)}(T)) \rightarrow D_{\text{coh}}^b(\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}})$ , il en résulte que  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{P}}^{(\bullet)}(T)$  est un facteur direct de  $f_+^{(\bullet)}(\tilde{\mathcal{E}}^{(\bullet)})$  dans la catégorie  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{P}}^{(\bullet)}(T))$ , et donc dans  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{P}}^{(\bullet)})$  (en effet, le foncteur oubli du diviseur est pleinement fidèle d'après 3.2.5). Il résulte de 5.5.1 que l'on obtient  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{P}}^{(\bullet)}(T) \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{P}}^{(\bullet)})$ . □

## Références

- [Abe10] T. ABE – « Explicit calculation of Frobenius isomorphisms and Poincaré duality in the theory of arithmetic  $\mathcal{D}$ -module », (2010). 50
- [BBD82] A. A. BEĬLINSON, J. BERNSTEIN et P. DELIGNE – « Faisceaux pervers », Analysis and topology on singular spaces, I (Luminy, 1981), Astérisque, vol. 100, Soc. Math. France, Paris, 1982, p. 5–171. 37, 39, 42
- [Ber90] P. BERTHELOT – « Cohomologie rigide et théorie des  $\mathcal{D}$ -modules »,  $p$ -adic analysis (Trento, 1989), Springer, Berlin, 1990, p. 80–124. 51
- [Ber96a] —, « Cohérence différentielle des algèbres de fonctions surconvergentes », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **323** (1996), no. 1, p. 35–40. 35, 50
- [Ber96b] —, «  $\mathcal{D}$ -modules arithmétiques. I. Opérateurs différentiels de niveau fini », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **29** (1996), no. 2, p. 185–272. 2, 3, 4, 17, 23, 27, 30, 34, 35, 40, 45, 46, 48, 51
- [Ber02] —, « Introduction à la théorie arithmétique des  $\mathcal{D}$ -modules », *Astérisque* (2002), no. 279, p. 1–80, Cohomologies  $p$ -adiques et applications arithmétiques, II. 4, 21, 26, 27, 28, 30, 43, 44, 45, 48, 50
- [BGK<sup>+</sup>87] A. BOREL, P.-P. GRIVEL, B. KAUP, A. HAEFLIGER, B. MALGRANGE et F. EHLERS – *Algebraic D-modules*, Academic Press Inc., Boston, MA, 1987. 23, 24
- [BP09] G. BÖCKLE et R. PINK – *Cohomological theory of crystals over function fields*, EMS Tracts in Mathematics, vol. 9, European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2009. 7, 13, 14, 24
- [Car04] D. CARO – «  $\mathcal{D}$ -modules arithmétiques surcohérents. Application aux fonctions L », *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* **54** (2004), no. 6, p. 1943–1996. 2, 3, 41, 42, 43, 47, 49, 50
- [Car06] —, « Fonctions L associées aux  $\mathcal{D}$ -modules arithmétiques. Cas des courbes », *Compositio Mathematica* **142** (2006), no. 01, p. 169–206. 29, 47
- [Car09] —, «  $\mathcal{D}$ -modules arithmétiques surholonomes », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **42** (2009), no. 1, p. 141–192. 49
- [Car11] —, « La surcohérence entraîne l'holonomie », *ArXiv Mathematics e-prints* (2011). 48
- [God73] R. GODEMENT – *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Hermann, Paris, 1973, Troisième édition revue et corrigée, Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, XIII, Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1252. 14
- [Har66] R. HARTSHORNE – *Residues and duality*, Springer-Verlag, Berlin, 1966. 8, 14, 22

- [KS06] M. KASHIWARA et P. SCHAPIRA – *Categories and sheaves*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 332, Springer-Verlag, Berlin, 2006. 11
- [Miy91] J.-I. MIYACHI – « Localization of triangulated categories and derived categories », *J. Algebra* **141** (1991), no. 2, p. 463–483. 7, 12
- [Sch02] P. SCHNEIDER – *Nonarchimedean functional analysis*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2002. 34

Daniel Caro  
 Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme  
 Université de Caen Campus 2  
 14032 Caen Cedex  
 France.  
 email : daniel.caro@unicaen.fr